

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем

*Материалы
XVI Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов*

Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2022 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Mathematical and Computer Modelling of Natural Science and Social Problems (MCM-2022)

*Proceedings of the Sixteenth Russian Conference
with international participation MCM-2022*

Penza, Russian Federation, 1–4 June, 2022

E d i t e d b y
Ilya V. Boykov

Пенза • Издательство ПГУ • 2022

УДК 51
ББК 22.1
М64

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XVI Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2022 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. – 248 с.

ISBN 978-5-907600-42-3

Отражены основные результаты работы конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теория приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, биологии; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематика и нейрокомпьютеры.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 22.1

Программный комитет

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
В. И. Паньженский, к.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *заместитель председателя*; **Д. В. Артамонов**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
В. И. Горбаченко, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
В. В. Маркин, д.социол.н., профессор (Москва, Россия); **П. С. Мартышко**, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН (Екатеринбург, Россия);
М. В. Носков, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия); **В. И. Половинкин**, д.ф.-м.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия); **В. С. Сизиков**, д.т.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия); **Д. Н. Сидоров**, д.ф.-м.н., профессор (Иркутск, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия);
Л. А. Сухарев, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия); **С. Фаудаоглы**, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
Л. А. Купряшина, к.пед.н., доцент (Пенза, Россия) – *ответственный секретарь конференции*

Приказ о проведении XVI Всероссийской с международным участием научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (МКМ-2022) № 301/о от 12.04.2022

ISBN 978-5-907600-42-3

© Пензенский государственный университет, 2022

1. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

УДК 517.956.223

Разрешимость одной краевой задачи с операторными граничными условиями для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с комплексным параметром

Бахрам Али Алиев¹, Вугар Закулла Керимов²

¹Институт математики и механики национальной академии наук Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

^{1,2}Азербайджанский государственный педагогический университет, г. Баку, Азербайджан

¹aliyevbakhram@yandex.ru, ²vuqarkerimli@mail.ru

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве H исследуются вопросы разрешимости одной краевой задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с комплексным параметром в случае, когда в одном из краевых условий присутствует линейный неограниченный оператор.

Ключевые слова: гильбертово пространство, дифференциально-операторное уравнение, интерполяционные пространства

Solvability of one boundary value problem with operator boundary conditions for elliptic second-order differential operator equation with complex parameter

Bahram Ali Aliev¹, Vugar Zakulla Kerimov²

¹Institute of Mathematics and Mechanics of NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

^{1,2}Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan

¹aliyevbakhram@yandex.ru, ²vuqarkerimli@mail.ru

Abstract. In separable Hilbert space we investigate solvability of one boundary value problem for one elliptic second –order differential operator equation with complex parameter in the case when one of the boundary conditions contains unbounded linear operator.

Keywords: Hilbert space, differential-operator equation, interpolation spaces

Прежде чем перейти к теме настоящей работы, кратко изложим некоторые имеющиеся результаты, которые близки к данной работе по постановке задачи.

В работе [1] в UMD банаховом пространстве E , в частности изучены вопросы разрешимости следующей краевой задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка:

$$\lambda u(x) - u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u'(1) + Bu(0) &= f_1, \\ u'(0) &= f_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где λ – комплексный параметр; A является линейным замкнутым, плотно определенным и обратимым оператором в E , $(-\infty, 0] \in \rho(A)$ и

$\sup_{\lambda \leq 0} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} < \infty$ и для некоторого $\phi \in [0, \pi)$ в углу $|\arg \lambda| \geq \pi - \phi$, $\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} < C(1 + |\lambda|)^{-1}$; B – линейный неограниченный оператор в

E , который ограниченно действует из $E\left(A^{1/2}\right)$ в E и из $E(A)$ в

$E\left(A^{1/2}\right)$. При этих условиях доказано что, для $\lambda \in \mathbb{C}$ с достаточно

большой нормой $|\lambda|$, принадлежащих углу $|\arg \lambda| \leq \phi < \pi$, где $\phi \in [0, \pi)$ – любое фиксированное число, имеет место теорема об изоморфизме между решениями, принадлежащими $W_p^2((0,1); E(A), E)$ и правой частью краевой задачи (1), (2) принадлежащей прямой сумме

$$L_p((0,1); E) + (E(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p} + (E(A), E)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}, p}, \quad p \in (1, +\infty).$$

Установлена также некоторая оценка для решения задачи (1), (2) в пространстве $L_p((0,1); E)$. В этом случае принято говорить, что краевая задача (1), (2) коэрцитивна разрешима в пространстве $L_p((0,1); E)$. При этом установленная оценка для решения задачи (1), (2) называется коэрцитивной оценкой.

Далее, в работе [2] в UMD банаховом пространстве E изучены в частности вопросы разрешимости следующей краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка, с комплексным параметром:

$$-u''(x) + (A + \lambda I)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u'(1) + u(0) &= f_1, \\ u(1) &= f_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где A -линейный замкнутый, плотно определенный и обратимый оператор в UMD банаховом пространстве E , $(-\infty, 0] \in \rho(A)$ и $\sup_{\lambda \leq 0} \|\lambda(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} < \infty$ и для некоторого $0 \leq \phi < \pi$, в углу $|\arg \lambda| \geq \pi - \phi$, имеет место оценка $\|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}$.

Доказано, что краевая задача (3), (4) некоэрцитивна разрешима в пространстве $L_p((0,1); E)$, $p \in (1, +\infty)$. Точнее, в работе [2] доказано, что для $f \in L_p\left((0,1); E\left(A^{1/2}\right)\right)$, $f_k \in \left(E\left(A^2\right), E\right)_{\frac{3}{4} - \frac{k}{4} + \frac{1}{4p}, p}$, $k=1,2$, $p \in (1, +\infty)$ и для $\lambda \in \mathbb{C}$ с достаточно большой нормой $|\lambda|$, принадлежащих углу $|\arg \lambda| \leq \phi < \pi$, задача (3), (4) имеет единственное решение из $W_p^2((0,1); E(A), E)$ и для него справедлива некоторая некоэрцитивная оценка.

В данной работе в сепарабельном гильбертовом пространстве H , изучаются вопросы разрешимости следующей краевой задачи:

$$L(\lambda)u := \lambda u(x) - u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (5)$$

$$L_1 u := Bu'(1) + u(0) = f_1, \quad (6)$$

$$L_2 u := u(1) = f_2,$$

где λ комплексный параметр; A является ϕ -позитивным оператором в H ; B -линейный неограниченный оператор, который подчинен оператору $A^{1/2}$ в определенном смысле и коммутативен с обратным оператором A^{-1} на $D(B)$, где $D(B)$ -область определения оператора B .

При этих условиях доказывается, что для $f \in L_p((0,1); H(A))$, $f_k \in \left(H\left(A^2\right), H\right)_{1 - \frac{k}{2} + \frac{1}{4p}, p}$, $p \in (1, +\infty)$ $k=1,2$ и для $\lambda \in \mathbb{C}$ с достаточно большой нормой $|\lambda|$, принадлежащих углу $|\arg \lambda| \leq \phi < \pi$, где $\phi \in [0, \pi)$ - любое фиксированное число, краевая задача (5), (6) имеет единственное решение из $W_p^2((0,1); H(A), H)$ и для решения справедлива некоторая некоэрцитивная оценка. Точнее, в данной работе найдены достаточные условия для существования и единственности решения задачи (5), (6) принадлежащее пространству $W_p^2((0,1); H(A), H)$.

Как видим, краевая задача (5), (6) отличается от краевой задачи (3), (4) тем, что в краевом условии (6) участвует линейный неограничен-

ный оператор B . Поясним роль неограниченного оператора B , при исследовании разрешимости краевой задачи (5), (6) сравнительно с краевой задачей (3), (4). Дело в том, что для существования решения задачи (5), (6), которое принадлежит пространству $W_p^2((0,1); H(A), H)$, элемент f_2 не может, как это имеет место для краевой задачи (3), (4), принадлежать интерполяционному пространству $(H(A^2), H)_{\frac{1}{4} + \frac{1}{4p}, p}$, а должен принадлежать более узкому интерполяционному пространству $(H(A^2), H)_{\frac{1}{4p}, p}$, хотя при этом элемент f_1 может принадлежать пространству $(H(A^2), H)_{\frac{1}{2} + \frac{1}{4p}, p}$.

В результате вектор-функция $f(x)$ в краевой задаче (5), (6) не может принадлежать пространству $L_p\left((0,1); H\left(A^{1/2}\right)\right)$, что имеет место для краевой задачи (3), (4), а должно быть выбрано из более узкого пространства $L_p((0,1); H(A))$.

Введем определения и понятия, которые используются в работе.

Пусть E_1 и E — банаховы пространства. Через $L(E_1, E)$ обозначим банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из E_1 в E с обычной операторной нормой. В частном случае, $L(E) := L(E, E)$.

Определение 1. Линейный замкнутый оператор A в гильбертовом пространстве H будем называть ϕ -позитивным, если его область определения $D(A)$ плотна в H и при некотором $\phi \in [0, \pi)$, для всех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, из угла $|\arg \lambda| \leq \phi$ (включая $\lambda = 0$) существуют операторы $(A + \lambda I)^{-1}$, для которых, при этих λ , имеет место оценка

$$\left\| (A + \lambda I)^{-1} \right\|_{L(H)} \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}$$

где I — единичный оператор в H , $C = \text{const} > 0$.

Известно [3, лемма 5.4.2/6], что для $|\arg \lambda| \leq \phi$, $\alpha \in \mathbb{R}$ существует дробные степени A^α и $(A + \lambda I)^\alpha$.

Простейшим примером ϕ -позитивных операторов является самосопряженный, положительно-определенный оператор, действующий в гильбертовом пространстве.

Пусть A является ϕ -позитивным оператором в H . Так как обратный к нему оператор A^{-1} ограничен в H , то

$$H(A^n) := \left\{ u : u \in D(A^n), \|u\|_{H(A^n)} = \|A^n u\|_H \right\}, \quad n \in N -$$

гильбертово пространство, норма которого эквивалентна норме графика оператора A^n .

Пусть A и B линейные замкнутые операторы в банаховом пространстве E .

Определение 2. Оператор B называется подчиненным оператору A , в Банаховом пространстве E , если $D(B) \supset D(A)$ и

$$\|Bu\| \leq C\|Au\|, \quad u \in D(A).$$

Определение 3. (см [4, теорема 1.14.5]). Пусть A является ϕ -позитивным оператором в пространстве H . Тогда для $\theta \in (0,1)$, $p > 1$, $n \in N$ интерполяционное пространство $(H(A^n), H)_{\theta, p}$ гильбертовых пространств $H(A^n)$ и H определяются равенством

$$\begin{aligned} (H(A^n), H)_{\theta, p} &:= \left\{ u : u \in H, \|u\|_{(H(A^n), H)_{\theta, p}} := \right. \\ &:= \left. \left(\int_0^{+\infty} t^{-1+n\theta p} \|A^n e^{-tA} u\|_H^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

При этом, по определению $(H(A^n), H)_{0, p} := H(A^n)$, $(H(A^n), H)_{1, p} := H$.

Через $L_p((0,1); H)$, $p \in (1, +\infty)$, обозначим банахово пространство (при $p = 2$ -гильбертово пространство) вектор-функций $u(\cdot) : [0,1] \rightarrow H$, сильно измеримых и суммируемых в p -й степени, с нормой

$$\|u\|_{L_p((0,1); H)} := \left(\int_0^1 \|u(x)\|_H^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а через $W_p^{2n}((0,1); H(A^n), H) := \left\{ u : A^n u, u^{(2n)} \in L_p((0,1); H) \right\}$ – банахово пространство вектор-функций с нормой

$$\|u\|_{W_p^{2n}((0,1);H(A^n),H)} := \|A^n u\|_{L_p((0,1);H)} + \|u^{(2n)}\|_{L_p((0,1);H)}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) A является ϕ -позитивным оператором в H ;
- 2) линейный замкнутый оператор B подчинен оператору $A^{1/2}$ в H ;
- 3) оператор B коммутативен с оператором A^{-1} , т.е., для любого $v \in D(B)$ имеет место равенство: $A^{-1}Bv = BA^{-1}v$.

Тогда, для $f \in L_p((0,1);H(A))$, $f_k \in (H(A^2), H)_{1-\frac{k}{2}+\frac{1}{4p}, p}$, $k=1,2$,

$p \in (1, +\infty)$ и для $\lambda \in \mathbb{C}$ с достаточно большой $|\lambda|$, принадлежащих углу $|\arg \lambda| \leq \phi < \pi$ задача (5), (6) имеет единственное решение $u \in W_p^2((0,1);H(A), H)$ и для решения имеет место следующая некоэрцитивная оценка

$$\begin{aligned} & |\lambda| \|u\|_{L_p((0,1);H)} + \|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|Au\|_{L_p((0,1);H)} \leq \\ & \leq C \left[|\lambda| \|f\|_{L_p((0,1);H(A))} + \sum_{k=1}^2 \left(\|f_k\|_{(H(A^2), H)_{1-\frac{k}{2}+\frac{1}{4p}, p}} + |\lambda|^{k-\frac{1}{2p}} \|f_k\|_H \right) \right]. \end{aligned}$$

Вопросы разрешимости краевых задач (5), (6) в случае, когда оператор B является линейным ограниченным оператором в H , исследованы в работе [5].

Список литературы

1. Aliev B. A., Yakubov Ya. Second order elliptic differential-operator equations with unbounded operator boundary conditions in UMD Banach Spaces // Integral Equations and Operator Theory. 2011. № 69. P. 269–300.
2. Favini A., Yakubov Ya. Irregular boundary value problems for second order elliptic differential-operator equations in UMD Banach spaces // Mathematische Annalen. 2010. № 348. P. 601–632.
3. Yakubov S., Yakubov Ya. Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton : Chapman and Hall / CRC, 2000.
4. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980. 664 с.
5. Алиев Б. А., Халыгова С. З. Вопросы разрешимости одной краевой задачи для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с комплексным параметром // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVI Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2021. С. 42–45.

**Моделирование задачи цифровой обработки искаженного
изображения Юпитера и его спутников путем
решения интегральных уравнений**

Валерий Сергеевич Сизиков

Национальный исследовательский университет ИТМО,
г. Санкт-Петербург, Россия
sizikov2000@mail.ru

Аннотация. Представлены цифровые технологии применительно к задаче повышения разрешающей способности измерительных устройств (телескопов, фотокамер и т.д.) путем математической и компьютерной обработки результатов измерений на примере устранения смазывания и зашумления изображения Юпитера и его спутников. Полагается, что на смазанное телескопическое изображение наложен аппаратурный несмазанный шум. Шум устраняется. Чтобы далее устранить смаз, определяются его параметры (угол и величина смаза) разработанным «спектральным методом» и затем устраняется смаз путем решения интегральных уравнений, ядро которых определяется параметрами смаза.

Ключевые слова: смазанное изображение, аппаратурный шум, спектральный метод, набор одномерных интегральных уравнений, метод параметрической фильтрации Винера, MatLab

**Modeling the problem of digital processing
the distorted image of Jupiter and its satellites
by solving the integral equations**

Valeriy S. Sizikov

ITMO University, Saint Petersburg, Russia
sizikov2000@mail.ru

Abstract. Digital technologies are presented in relation to the problem of increasing the resolution of measuring devices (telescopes, cameras, etc.) by mathematical and computer processing of measurement results using the example of eliminating smearing and noise in the image of Jupiter and its satellites. It is assumed that instrumental non-smeared noise is superimposed on the smeared telescopic image. Noise is eliminated. To further eliminate the smear, its parameters (angle and magnitude of the smear) are determined by the developed “spectral method” and the smear is eliminated by solving integral equations, the kernel of which is determined by the smear parameters.

Keywords: smeared image, instrumental noise, spectral method, set of one-dimensional integral equations, the Wiener parametric filtering method, MatLab

Постановка задачи

Рассматривается изображение Юпитера со спутниками Ио и Ганимед. Такое (неискаженное) изображение обычно имеется в каталогах астрономических объектов (Messier, NGC и др.). Однако изображение может быть получено с большой экспозицией, что типично для наблюдения слабых астрономических объектов. За это время Земля заметно повернется и, чтобы не было смазывания изображения, телескоп должен повернуться синхронно в противоположную сторону. Но может возникнуть рассогласование вращений Земли и телескопа и тогда возникнет смаз изображения Юпитера и его спутников. Кроме того, на смаз может наложиться аппаратный импульсный шум (рис. 1) из-за выхода из строя ряда сенсоров (датчиков) матрицы ПЗС (прибора с зарядовой связью). Нужно математическим и компьютерным путем устранить смаз и шум, учитывая, что параметры смаза могут быть практически неизвестны.

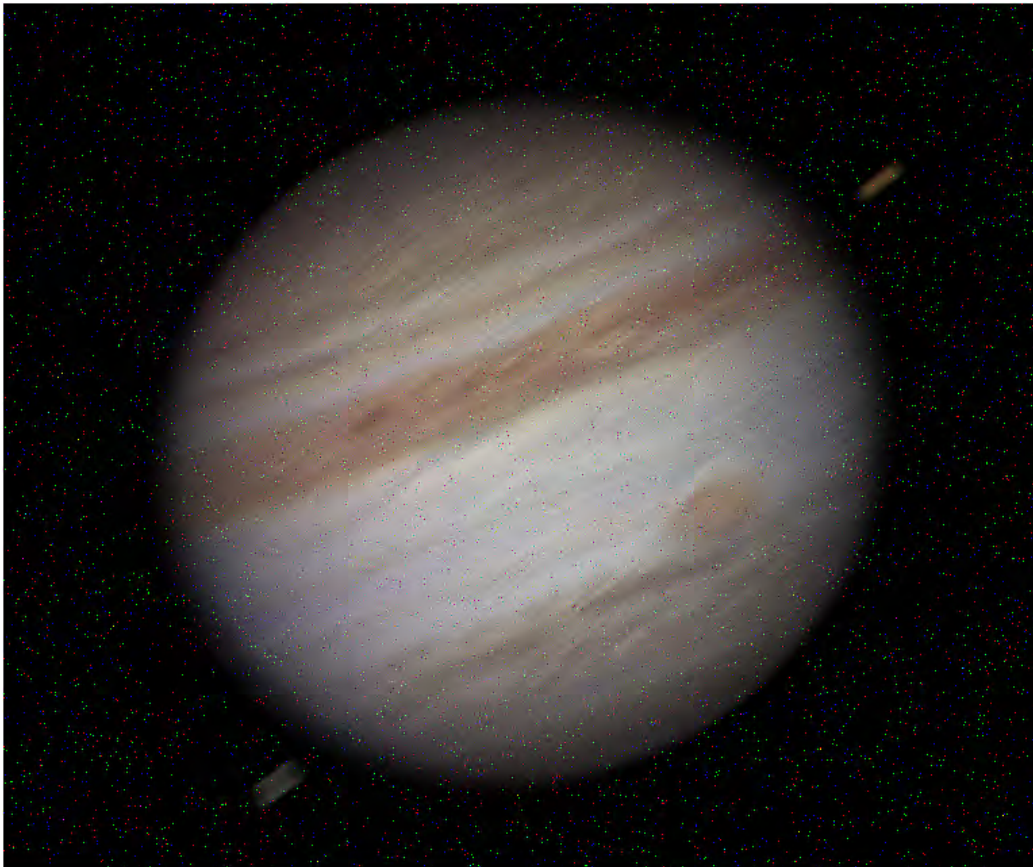


Рис. 1. Смазанное и зашумленное изображение Юпитера и спутников Ио и Ганимед

Смазывание и зашумление (прямая задача)

Смаз изображения на рис. 1 моделируется выражением [1–3]:

$$g_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi) w_y(\xi) d\xi \quad (1)$$

или

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi, y - \eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2)$$

где h – функция рассеяния точки (ФРТ, PSF), равная

$$h(x) = \begin{cases} 1/\Delta, & -\Delta \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

w – интенсивность на неискаженном изображении, g – интенсивность на смазанном изображении. В (1) оси x и ξ направлены вдоль смаза (θ – угол смаза, Δ – величина смаза), а y – перпендикулярно смазу (y играет роль параметра), а в (2) оси x и ξ направлены горизонтально, а y и η – вертикально вниз.

Для компьютерной реализации (1) и (3) разработаны MatLab-программы [3]. На рис. 1 приведено смазанное изображение Юпитера и спутников.

На смаз наложен несмазанный импульсный шум типа 'salt & pepper' (рис. 1) с помощью встроенной m-функции `imnoise.m` с долей зашумления $d = 0.01$.

Обратные задачи устранения шума и смаза

Первая обратная задача – устранение (фильтрация) импульсного шума медианным фильтром Тьюки с окном [3 3] или [5 5] (рис. 2).

Во **второй обратной задаче** выражения (1) и (2) – это интегральные уравнения (ИУ), в которых g – заданная функция (смазанное изображение), а w – искомая функция (неискаженное изображение). Сложность решения этих уравнений состоит в том, что параметры смаза θ и Δ могут быть известны неточно, а требуется высокая точность их знания, так как задача решения (1) и (2) некорректна.

Спектральный метод (способ) определения параметров θ и Δ [3–6]. Рассмотрим данный метод по рис. 3а. Вычисляем модуль преобразования Фурье (ПФ) $|G(\omega_1, \omega_2)|$. Показано, что ПФ – это совокупность параллельных линий в случае смаза (рис. 3а). Проведя дополнительные линии, измеряем угол $\tilde{\theta}$, а также $\tilde{\psi} = 90^\circ - \tilde{\theta}$. Однако это не истинные углы θ и ψ . Истинные углы находятся по формулам [4, 5]:

$$\psi = \arctg(\tg \tilde{\psi}/r), \quad r = M/N, \quad \theta = 90^\circ - \psi, \quad (4)$$

M и N – количество строк и столбцов в изображении g .

Конкретно: $\tilde{\theta} = 37^\circ.8$, $\tilde{\psi} = 52^\circ.2$, $M = 817$, $N = 843$, $r = 0.969$, $\psi = 53^\circ.1$ и, как следствие (по нескольким реализациям), $\theta = 90^\circ - \psi = 36^\circ.9 \pm 0^\circ.3$.

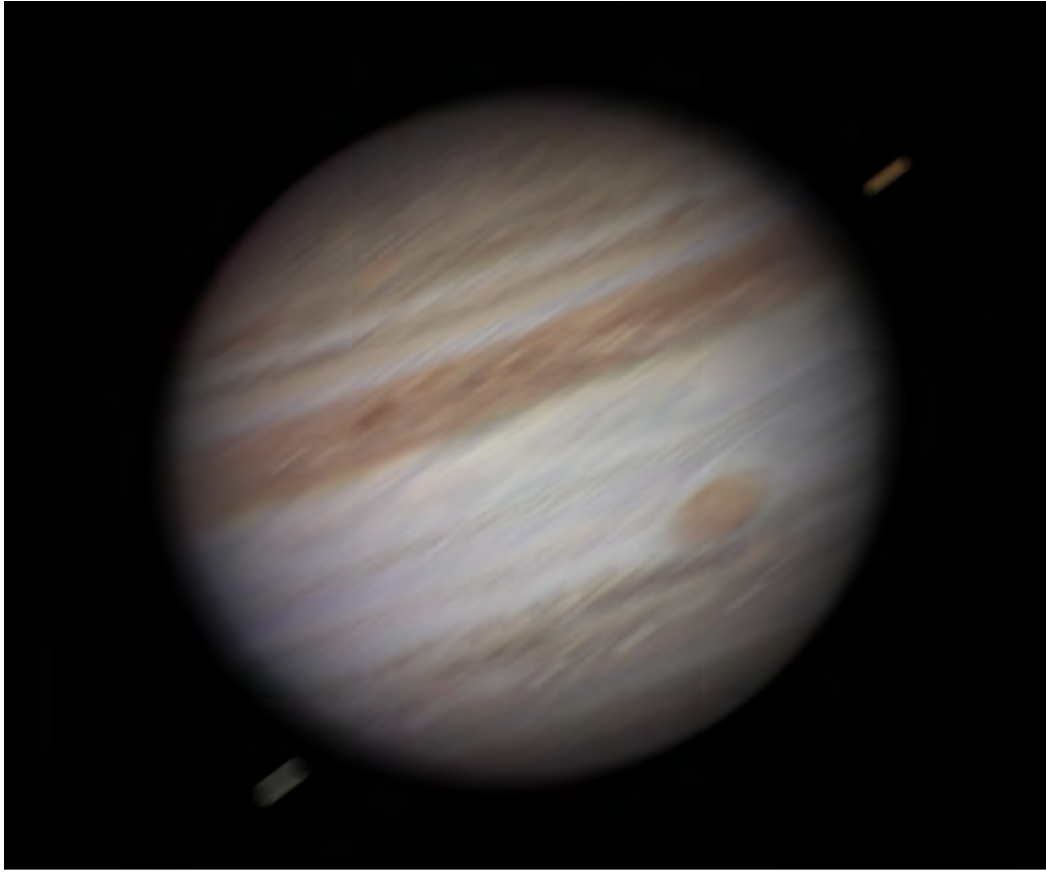


Рис. 2. Изображение после устранения шума

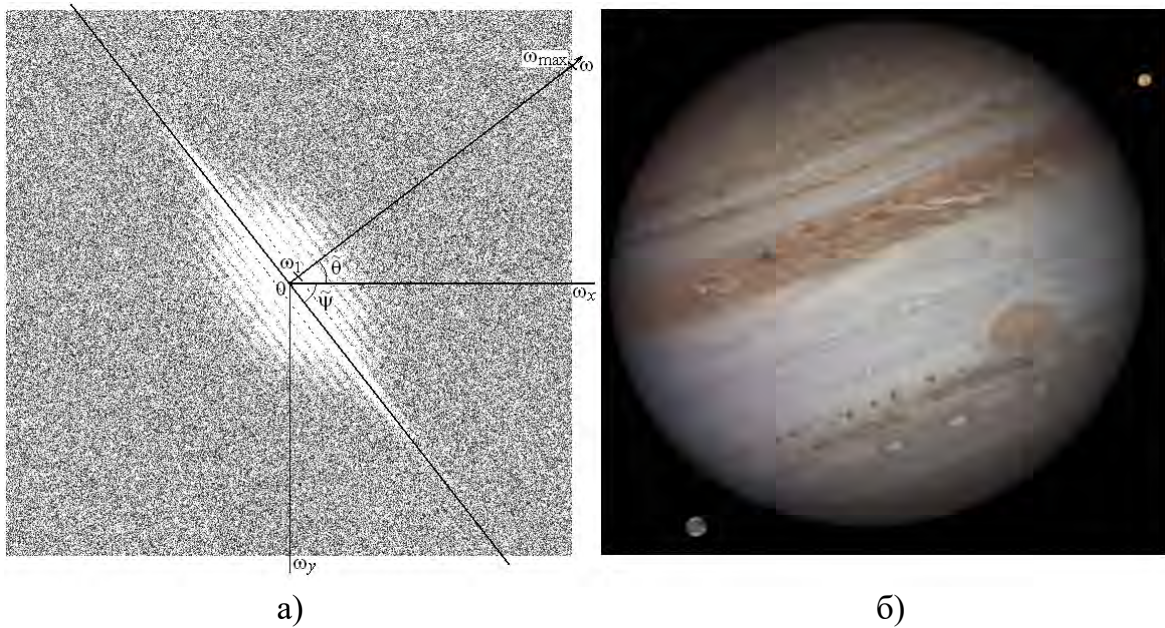


Рис. 3. а) – спектр (ПФ) по модулю $|G(\omega_1, \omega_2)|$ смазанного изображения $g(x, y)$; б) – модуль восстановленного изображения $|w_{yK}|$ методом ПФВ, $K = 5 \cdot 10^{-4}$

Определим также параметр Δ . Согласно [4, 5], $\Delta = 2(\omega_{\max}/\omega_1)$. Однако эта формула дает завышенное значение Δ из-за нечеткости (завышения) $\omega_{\max}$. Предлагается более точная формула:

$$\Delta = 2(\omega_{\max}/\omega_1)\gamma, \quad \gamma < 1, \quad (5)$$

что равносильно занижению $\omega_{\max}$. Параметр γ нужно определять путем подбора. В работах [4, 5] $\gamma = 0.85$. В данной работе положено также $\gamma = 0.85$. В результате $\Delta = 49.7 \pm 0.5$.

Итак, спектральный метод дал следующие значения параметров смаза: $\theta = 36^\circ.9$, $\Delta = 49.7$, а точные значения: $\theta = 37^\circ$, $\Delta = 50$, т.е. значения параметров смаза θ и Δ найдены спектральным методом с удовлетворительной точностью.

Восстановление изображения

После отыскания параметров θ и Δ , а значит, определения ФРТ появилась возможность восстановить изображение Юпитера и двух его спутников путем решения ИУ (1) или (2). В качестве устойчивого метода решения ИУ выбран метод параметрической фильтрации Винера (ПФВ) [3, 7, 8].

Согласно ПФВ, восстановленное изображение при решении ИУ (1) равно

$$w_{yK}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-\omega)G_y(\infty)}{|H(\omega)|^2 + K} e^{-i\omega\xi} d\omega, \quad (6)$$

где H и G – преобразования Фурье ядра ИУ (или ФРТ) h и изображения g соответственно, $K > 0$ – параметр метода ПФВ, который определим путем подбора. На рис. 3,б – результат восстановления изображения согласно (6).

Данный пример демонстрирует успешное восстановление изображения при использовании «спектрального метода». Решены также другие примеры [3–6], подтвердившие эффективность «спектрального метода» определения параметров смаза θ и Δ , а значит, ФРТ и ядра ИУ.

Список литературы

1. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. СПб. : Питер, 2002. 602 с.
2. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. М. : Техносфера, 2006. 616 с.
3. Сизиков В. С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab. СПб. : Лань, 2017. 412 с.
4. Сизиков В. С. Оценка функции рассеяния точки по спектру искаженного томографического изображения // Оптический журнал. 2015. Т. 82, № 10. С. 13–17.
5. Сизиков В. С. Спектральный способ оценки функции рассеяния точки в задаче устранения искажений изображений // Оптический журнал. 2017. Т. 84, № 2. С. 36–44.

6. Sizikov V. S., Sergienko A. A., Kondulukova D. A. Spectral method for stable estimating the distortion parameters in inverse problem of image restoration // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 4. С. 379–386.

7. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М. : Техносфера, 2006. 616 с.

8. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев : Наук. думка, 1986. 542 с.

Semi-Bounded Solution of Hypersingular Integral Equations of the First Kind

Zainidin K. Eshkuvatov

University Malaysia Terengganu (UMT), Kuala Terengganu, Malaysia;
National University of Uzbekistan (NUUZ), Tashkent, Uzbekistan
zainidin@umt.edu.my

Abstract. Semi-analytical solution of hyper-singular integral equations (HSIEs) of the first kind on the fixed interval $[-1, 1]$ with the assumption that the kernel of the hyper-singular integral is constant on the diagonal of the domain $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ is considered. The projection method together with the kernel expansion method is used to find the semi-bounded solution of HSIEs respectively. Exact calculations of hyper-singular and singular integrals using Chebyshev polynomial approximations of the third and fourth kind as well as kernel expansion method for regular kernel allowed us to obtain a highly accurate approximate solution. Few examples are provided to verify the validity and accuracy of the proposed method. Comparisons with other methods are also given. Numerical examples reveal that approximate solutions are exact if the solution of HSIEs is of the polynomial forms with corresponding weights. It is worth noting that the proposed method works well for large values of node points n and errors are drastically decreased.

Keywords: hypersingular integral equations, kernel expansion, Chebyshev polynomials, approximation, comparisons

Полуограниченные решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода

Зайнидин К. Эшкуватов

Университет Малайзии Теренггану (УМТ), г. Куала-Тренгану, Малайзия;
Национальный университет Узбекистана (НУУз), г. Ташкент, Узбекистан
zainidin@umt.edu.my

Аннотация. Численно-аналитические решения гиперсингулярных интегральных уравнений (ГИУ) первого рода, определенных на фиксированном интервале $[-1, 1]$, рассматриваются в предположении, что ядро гиперсингулярного интеграла постоянно на диагонали области $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Проекционный метод вместе с методом разложения ядра используется для нахождения полуограниченного решения ГИУ. Вычисления гиперсингулярных и сингулярных интегралов с использованием аппроксимаций полиномами Чебышева третьего и четвертого рода, а также метод разложения ядра для регулярного интеграла, позволили получить приближенное решение с высокой точностью. Приведено несколько примеров иллюстрирующих обоснованность и точность предложенного метода. Также приведены сравнения с другими методами.

Численные примеры показывают, что приближенные решения точны, если решения ГИУ имеют полиномиальную форму с соответствующими весами. Следует отметить, что предложенный метод хорошо работает при больших числах узловых точек n и величины погрешностей резко уменьшаются.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, разложение ядра, полиномы Чебышева, аппроксимация, сравнения

1. General statement of the singular problems

The mathematical formulation of physical phenomena often involves Cauchy-type singular integral equation of different order. General singular integral equations of the first kind of order p has the form

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \left[\frac{K(x,t)}{(t-x)^p} + L_1(x,t) \right] dt = f(x), \quad p = \{1, 2, \dots\} \quad (1)$$

where $x \in (-1, 1)$ is the singular point, $K(x, t), L_1(x, t)$ and $f(x)$ are given real valued continues functions and $\varphi(t)$ is to be determined. Notation

$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^p} dt$ denotes Cauchy singular integrals ($p=1$), Hadamard finite-part integrals or hypersingular integrals ($p=2$) and $p>2$ supersingular integrals.

In 1985, Golberg [1] considered Eq.(1) with the kernel $K(x, t)=1$, $L_1(x, t) \neq 0$, $p=2$ and proposed a projection method with the truncated series of Chebyshev polynomials of the second kind together with Galerkin and collocation methods. Uniform convergence and the rate of convergence of the projection method are obtained for hypersingular integral equations (HSIEs) (1). Martin [2, 1992] obtained the analytic solution to the simplest one-dimensional hypersingular integral equation i.e. the case of $K(x, t)=1$, $p=2$, $L_1(x, t)=0$ in Eq. (1). Mandal and Bera [3, 2006] have proposed a simple approximate method (Polynomial approximation) for solving a general hypersingular integral equation of the first kind (1) with $K(x, x) \neq 0$, $p=2$. The method is mostly concentrated on the bounded solution and illustrated the proposed method by considering some simple examples. Nik Long and Eshkuvatov [4, 2009] have used the complex variable function method to formulate the multiple curved crack problems into HSIEs of the first kind ($K(x, t)=1, p=2$) and these HSIEs are solved numerically for the unknown function, which are later used to find the stress intensity factor (SIF). Boykov et al. ([5, 2010]) proposed the spline-collocation method and its justification for the solution of one-dimensional hypersingular integral equations, polyhypersingular integral equations, and multi-dimensional hypersingular integral equations of the first kind.

Illustrative examples are demonstrated to show the accuracy and efficiency of the developed method.

In this note, Eq. (1) is considered at $p = 2$ and kernel $K(x, t)$ is constant on the diagonal of the region $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, i.e. we can assume that $K(x, x) = c_0 \neq 0$. In this case, we can write Eq. (1) in the form

$$\frac{c_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{Q_1(x, x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 L^*(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (2)$$

where $-1 < x < 1$ and $Q_1(x, t) = \frac{K(x, t) - K(x, x)}{t - x}$ and

$$L^*(x, t) = Q_2(x, t) + L_1(x, t), Q_2(x, t) = \frac{Q_1(x, t) - Q_1(x, x)}{t - x}. \quad (3)$$

The main aim is to find the semi-bounded solution to Eq. (2), hence we search solutions in the form

$$\varphi(x) = w_r(x) u(x), \quad r = \{1, 2\}, \quad (4)$$

where

$$w_1(x) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \quad w_2(x) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}. \quad (5)$$

Substituting (4) into (2), yields

$$\begin{aligned} & \frac{c_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_r(t)}{(t-x)^2} u(t) dt + \frac{Q_1(x, x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_r(t)}{t-x} u(t) dt \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 w_r(x) L^*(x, t) u(t) dt = f(x), r = \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (6)$$

To find an approximate solution of (6), the function $u(t)$ is approximated by

$$u(t) \cong u_{n,r}(t) = \sum_{j=0}^n b_{j,r} P_{j,r}^*(t) \quad r = \{1, 2\}, \quad (7)$$

where

$$P_{j,r}^*(t) = \begin{cases} V_j(t) = \frac{\cos((j+1/2)\theta)}{\cos(\theta/2)}, & r = 1, \\ W_j(t) = \frac{\sin((j+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}, & r = 2, \end{cases} \quad (8)$$

where $t = \cos\theta$ and approximate solution of Eq. (2) is computed by

$$\varphi(t) \approx \varphi_{n,r}(t) = \omega_r(t) \sum_{j=0}^n b_{j,r} P_{j,r}^*(t) \quad r = \{1, 2\}, \quad (9)$$

where unknown coefficients $b_{j,r}$ are needed to be determined.

2. Detail description of the approximate solution for HSIEs

To find an approximate solution of Eq. (6), substitute Eq. (7) into (6) to yield

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_{j,r} \left[\frac{c_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_r(t)}{(t-x)^2} P_{j,r}^*(t) dt + \frac{Q_1(x, x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_r(t)}{(t-x)} P_{j,r}^*(t) dt \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 w_r(x) L^*(x, t) P_{j,r}(t) dt \right] \\ + b_{0,r} \left[\frac{c_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_r(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{Q_1(x, x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_r(t)}{(t-x)} dt \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 w_r(x) L^*(x, t) dt \right] = f(x), \end{aligned} \quad (10)$$

It is known that the hypersingular operator H_g can be considered as differential Cauchy operator i.e.,

$$H_g u = \frac{d}{dx} C_g u = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)}{t-x} u(t) dt \right) \quad (11)$$

and it is proven in Mason and Handscomb [168, 2003]) that

Theorem 1. As a Cauchy principle value integral, we have

$$G_{j,r}^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_r(t) P_{j,r}^*(t)}{t-x} dt = \begin{cases} W_j(x) & r=1, \\ -V_j(x) & r=2. \end{cases} \quad (12)$$

Exact calculation of hypersingular and singular integrals using the results of Theorem 1 and Eq. (11), leads to

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_{j,r} \left[c_0 \frac{d}{dx} G_{j,r}^*(x) + Q_1(x, x) G_{j,r}^*(x) + \psi_{j,r}^*(x) \right] \\ + b_{0,r} \left[c_0 \frac{d}{dx} h_r(x) + Q_1(x, x) h_r(x) + \psi_{0,r}^*(x) \right] = f(x), \end{aligned} \quad (13)$$

where $G_{j,r}^*(x)$ is computed by (12) and $L^*(x, t)$ is defined by (3) and

$$\psi_{j,r}^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} L^*(x, t) V_j(t) dt, & r=1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} L^*(x, t) W_j(t) dt, & r=2. \end{cases} \quad (14)$$

and

$$h_r(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w_r(t)}{(t-x)} dt = \begin{cases} -1, & r=1 \\ 1, & r=2 \end{cases} \quad h'_r(x) = \begin{cases} 0, & r=1 \\ 0, & r=2 \end{cases} \quad (15)$$

Hence the system of algebraic equation can be get at the collation points x_k as the roots of $W_{n+1}(x)$ or $V_{n+1}(x)$ or Gauss-Labotto nodes $T'_{n+1}(x)$, as follows

$$\sum_{j=1}^n b_{j,r} \left[c_0 \frac{d}{dx} G_{j,r}^*(x)_{x=x_k} + Q_1(x_k, x_k) G_{j,r}^*(x_k) + \psi_{j,r}^*(x_k) \right] + b_{0,r} \left[(-1)^r Q_1(x_k, x_k) + \psi_{0,r}^*(x_k) \right] = f(x_k), k=1, \dots, n+1. \quad (16)$$

where functions $\psi_{j,r}^*(x_k)$ are defined in the case of non-degenerate kernel

$$\psi_{j,r}^*(x) \approx \begin{cases} \sum_{k=0}^{N_1} a_{k,1}(x) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} V_k(t) V_j(t) dt = a_{j,1}(x), & r=1 \\ \sum_{k=0}^{N_1} a_{k,2}(x) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} W_k(t) W_j(t) dt = a_{j,2}(x), & r=2 \end{cases} \quad (17)$$

For the degenerate kernel case, we have

$$\psi_{j,r}^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} L^*(x, t) W_j(t) dt = \sum_{k=1}^{n+1} A_{k,3} f_3(x, t_{k,3}), & r=3, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} L^*(x, t) V_j(t) dt = \sum_{k=1}^{n+1} A_{k,4} f_4(x, t_{k,4}), & r=4 \end{cases} \quad (18)$$

To find the unknown coefficients $b_{j,r}$ $j=0, \dots, n$, we solve Eq. (16) using either (17) or (18) and substitute the values of $b_{j,r}$ into Eq. (9) to get numerical solution of Eq. (2) for $p=2, r=\{1, 2\}$.

References

1. Golberg M. A. The Convergence of Several Algorithms for Solving Integral Equations with Finite Part Integrals // Applied Mathematics and Computation. 1987. Vol. 21. P. 283–293

2. Martin P. A. Exact solution of a simple hypersingular integral equation // J. Int. Eq. Appl. Spring. 1992. Vol. 4(2). P. 197–204.
3. Mandal B. N., Bera G. H. Approximate solution of a class of singular integral equations of second kind // Journal of Computational and Applied Mathematics(JCAM). 2007. Vol. 206. P. 189–195.
4. Nik Long N. M. A., Eshkuvatov Z. K. Hypersingular intergral equations for multiple curved cracks in plane elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46 (13). P. 2611–2617.
5. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. An approximate solution of hypersingular integral equations // Appl. Num. Math. 2010. Vol. 60. P. 607–628.

Динамика системы из трех вращающихся в жидкости частиц

Сергей Иванович Мартынов¹, Леонилла Юрьевна Ткач²

^{1,2}Сургутский государственный университет, г. Сургут, Россия

¹martynovsi@mail.ru, ²leonilla7777@mail.ru

Аннотация. Моделируется динамика системы из трех вращающихся в жидкости частиц разного размера. Проведено компьютерное моделирование динамики системы из трех вращающихся частиц, образующих треугольник в плоскости, перпендикулярной оси вращения частиц. Результаты проведенного численного моделирования динамики такой системы показывают, что в результате гидродинамического взаимодействия вся структура вращается по направлению вращения частиц и остается устойчивой к распаду.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамика, система, гидродинамическое взаимодействие, вращение

Dynamics of a system of particles rotating in a fluid

Sergey I. Martynov¹, Leonilla Yu. Tkach²

^{1,2}Surgut State University, Surgut, Russia

¹martynovsi@mail.ru, ²leonilla7777@mail.ru

Abstract. The dynamics of a system of three particles of different sizes rotating in a liquid is modeled. A computer simulation of the dynamics of a system of three rotating particles, forming a triangle in a plane perpendicular to the axis of rotation of the particles, has been carried out. The results of the numerical simulation of the dynamics of such a system show that, as a result of hydrodynamic interaction, the entire structure rotates in the direction of particle rotation and remains resistant to decay.

Keywords: computer simulation, dynamics, system, hydrodynamic interaction, rotation

Результаты динамики самодвижущихся частиц в жидкости, представленные в международных публикациях за последнее десятилетие, представляет собой часть обширных и интенсивно проводимых исследований неравновесных систем с активными частицами, находящихся в неравновесном состоянии вследствие воздействия внешних полей (электрических или магнитных), химических реакций или гидродинамических течений. Системы с такими частицами демонстрируют возможность динамической самосборки, как результат коллективного поведения активных частиц в условиях неравновесного состояния [1–3].

Возможность образования структур в объеме жидкости в результате различных механизмов перемещения самодвижущихся частиц представлены в работах [4-6]. Коллективное поведение системы большого числа самодвижущихся частиц определяется их взаимодействием между собой. Поскольку движение таких систем происходит в жидкости, то гидродинамическое взаимодействие частиц существенным образом влияет на их динамику. В теоретических подходах, основанных на прямом моделировании динамики отдельных частиц со случайными силами, гидродинамическое взаимодействие учитывается в сильно упрощенном виде, а именно, в виде силы трения, действующего на частицу, или в приближении среднего поля. Более точный учет гидродинамических сил между активными частицами, не ограничивающееся рамками парного взаимодействия, все еще требует непомерно высоких вычислительных затрат, несмотря современное развитие компьютерных технологий и возрастание вычислительных возможностей компьютеров. А поскольку коллективное поведение системы активных частиц существенным образом связано с гидродинамическим взаимодействием, то необходимы новые подходы, позволяющие учитывать такое взаимодействие для моделирования формирования общей динамики системы из динамики составляющих ее частиц.

В настоящей работе предлагается такой подход и его возможности на примере моделирования динамики системы из трех твердых сферических частиц, образующих двухмерную структуру в виде треугольника. Рассмотрены две структуры. В первой структуре радиусы частиц одинаковые и равны a . Во второй структуре радиусы частиц равны a , $0.95a$, $1.05a$, соответственно. Структура помещена в несжимаемую жидкость вязкости η . Частицы вращаются под действием приложенного внешнего момента сил $\mathbf{M}$, одинакового для каждой частицы. Будем предполагать размер частиц таким, чтобы можно было пренебречь инерционными слагаемым в уравнениях движения, как жидкости, так и частиц. В этом случае система уравнений в частных производных, описывающая динамику такой системы, имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности частиц

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^k + \boldsymbol{\Omega}^k \times \mathbf{x}^k, \quad |\mathbf{x}^k| = a, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (2)$$

и далеко от частиц

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где p – давление, $\mathbf{u}$ – вектор скорости жидкости, $\mathbf{V}^k$ и $\boldsymbol{\Omega}^k$ – соответственно, поступательная и угловая скорость частицы с номером k , p_0 – невозмущенное давление в жидкости, $\mathbf{x}^k$ – вектор положение произ-

вольной точки среды относительно центра частицы с номером k . Скорости частиц определяются из уравнений

$$\mathbf{F}^k = 0, \quad \mathbf{M}^k + \mathbf{T}^k = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{F}^k$, $\mathbf{T}^k$ - сумма гидродинамических сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицу с номером k .

Метод решения системы уравнений (1) с граничными условиями (2), (3), а также процедура определения гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости с учетом взаимодействия всех частиц, представлены в работах [7, 8]. Согласно этому методу решение системы уравнений (1) для скорости и давления жидкости представляется в виде разложения в ряд по мультиполям от каждой частицы. Члены ряда содержат тензорные коэффициенты, которые находятся из решения системы алгебраических уравнений, которая получается из граничных условий на поверхности частиц (2). Линейные и угловые скорости частиц находятся из системы уравнений (4).

Для моделирования динамики системы частиц в жидкости с учетом их гидродинамического взаимодействия был разработан специальный программный комплекс, позволяющий не только рассчитывать динамику каждой частицы, но и визуализировать движение системы. Результаты, полученные с использованием метода и программного комплекса, хорошо согласуются с известными теоретическими и экспериментальными результатами по динамике, как одиночных, так и системы частиц.

Алгоритм расчетов следующий. Течение жидкости и движение частиц рассматривается относительно неподвижной системы координат. Задаются моменты, действующие на частицы и приводящие их во вращение. Вращение частиц вызывает течение жидкости. Находится распределение скорости и давления жидкости, вызванное вращением частиц, и вычисляются гидродинамические силы и моменты, действующие на частицы. Из уравнений динамики частиц находятся их поступательная и угловая скорости относительно жидкости. Задается малый промежуток времени, за который происходит малое смещение и вращение частиц и формирование новой конфигурации их расположения относительно друг друга. Для новой конфигурации частиц происходит перерасчет скорости и давления в жидкости и гидродинамических сил и моментов. Далее определяются новые поступательные и угловые скорости частиц и их малое смещение с формированием новой конфигурации их относительного расположения. Указанные расчеты повторяются указанное количество раз. На каждом шаге происходит контроль точности проведенных вычислений.

Цель проводимого моделирования – проверка влияния гидродинамического взаимодействия частиц на их коллективную динамику. В

частности, на устойчивость такой структуры к распаду на более мелкие образования в результате гидродинамического взаимодействия частиц. Такой процесс имеет место при поступательном перемещении системы частиц [8]. Однако, как показали результаты моделирования, рассматриваемая структура не распадается за достаточно продолжительный промежуток времени, а приобретает вращение вокруг оси, проходящей через центр тяжести системы в том же направлении, что и частицы. Причем, это справедливо как для первой, так и для второй рассмотренной структуры. Можно сделать вывод, что размер частиц при наличии собственного вращения частиц, обусловленного действием внешнего момента, мало влияет на коллективную динамику рассмотренной системы.

Список литературы

1. Wang Q., Yang L., Wang B., Yu E., Yu J., Zhang L. Collective Behavior of Reconfigurable Magnetic Droplets via Dynamic Self-Assembly // *ACS Appl Mater Interfaces*. 2019. Vol. 11, № 1. P. 1630–1637. doi:10.1021/acsami.8b17402
2. Kokot G., Kolmakov G. V., Aranson I. S., Snezhko A. Dynamic self-assembly and self-organized transport of magnetic micro-swimmers // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7. P. 14726. doi:10.1038/s41598-017-15193-z
3. Snezhko A. Complex collective dynamics of active torque-driven colloids at interfaces // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. 2016. № 21. P. 65–75. doi:10.1016/j.cocis.2015.11.010
4. Robertson B., Stark H., Kapral R. Collective orientational dynamics of pinned chemically-propelled nanorotors // *CHAOS*. 2018. Vol. 28(4). P. 045109. doi:10.1063/1.5018297
5. Aubret A., Youssef M., Sacanna S., Palacci J. Targeted assembly and synchronization of self-spinning microgears // *Nature Physics*. 2018. Vol. 14. P. 1114–1118. doi:10.1038/s41567-018-0227-4
6. Wang W., Duan W., Ahmed S., Sen A., Mallouk T. E. From one to many: Dynamic assembly and collective behavior of self-propelled colloidal motors // *Accounts of Chemical Research*. №. 48 P.1938–1946. doi:10.1021/accounts. accounts. 5b00025
7. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 1998. № 2. С. 112–119.
8. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2004. № 1. С. 152–164.

**Об обратной задаче одновременного определения
двух зависящих от времени коэффициентов и источника
в уравнении движения волн с поверхностным напряжением**

Араз Саламулла оглы Фараджев¹, Яшар Топуш оглы Мегралиев²

¹Азербайджанский государственный
педагогический университет, г. Баку, Азербайджан

²Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан

¹a.farajov@mail.ru, ²yashar_aze@mail.ru

Аннотация. В работе изучается классическое решение одной нелинейной обратной краевой задачи для уравнения с частными производными шестого порядка типа Буссинеска, описывающего движение волн на воде, с дополнительными интегральными условиями. Задача состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестные коэффициенты. Доказаны теоремы о существовании и единственности классического решения обратной задачи. Эти результаты основаны на теории доказательств однозначной разрешимости соответствующей прямой задачи, что также представляет самостоятельный интерес.

Ключевые слова: уравнение, обратная краевая задача, классическое решение, единственность

**On the inverse problem of simultaneous determination
of two time-dependent coefficients and a source in the equation
for the motion of waves with surface stress**

Araz Salamulla Farajov¹, Yashar Topush Mehraliyev²

¹Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan,

²Baku State University, Baku, Azerbaijan

¹a.farajov@mail.ru, ²yashar_aze@mail.ru

Abstract. We study the classical solution of a nonlinear inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq-type partial differential equation, which describes the motion of waves on water, with additional integral conditions. The task is that it is required, together with the solution, to determine the unknown coefficients. Theorems on the existence and uniqueness of the classical solution of the inverse problem are proved. These results are based on the theory of proofs of the unique solvability of the corresponding direct problem, which is also of independent interest.

Keywords: equation, inverse boundary value problem, classical solution, uniqueness

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий, распространение волн в разных средах и т.д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Основы теории и практики исследования обратных задач математической физики были заложены и развиты в фундаментальных работах выдающихся ученых А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2], В. К. Иванова [3] и их учеников.

Ясно, что при изучение обратных задач важную роль играет соответствующие прямые задачи. Изучению разных прямых краевых задач для рассмотренного здесь уравнения посвящены работы [4-8].

К обратным задачам для уравнений с частными производными высшего порядка посвящены многочисленные работы, в том числе для уравнения шестого порядка типа Буссинеска, из которых отметим [9-13].

Пусть $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$. Далее, пусть $f(x, t)$, $g(x, t)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $q(x)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ – заданные функции, определенные при $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$. Рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти тройку $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x, t)$, $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяющих уравнению

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - u_{ttxx}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) + u_{ttxxxx}(x, t) = \\ = a(t)u(x, t) + b(t)g(x, t) + f(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

с нелокальными начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_0^T p_1(t)u(x, t)dt + \phi(x), \\ u_t(x, 0) &= \int_0^T p_2(t)u(x, t)dt + \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \end{aligned} \quad (2)$$

периодическими условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \\ u_{xx}(0, t) &= u_{xx}(1, t), \quad u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (3)$$

и с дополнительными интегральными условиями

$$\int_0^1 q(x)u(x, t)dx = h_1(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

$$u(0, t) = h_2(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

где $f(x,t), g(x,t), p_i(t) (i=1,2), \phi(x), \psi(x), q(x), h_i(t) (i=1,2)$ – заданные функции, а $u(x,t), a(t)$ и $b(t)$ – искомые функции.

Определение 1. Классическим решением задачи (1)-(5) назовем тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t), a(t)$ и $b(t)$, обладающих следующими свойствами:

- 1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
- 2) функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны на $[0, T]$;
- 3) уравнение (1) и условия (2)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $q(x) \in L_2(0,1)$ $g(x,t), f(x,t) \in C(D_T)$, $\phi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, $p_i(t) \in C[0, T]$, $h_i(t) \in C^2[0, T] (i=1,2)$,

$$h(t) \equiv h_1(t)g(0,t) - h_2(t) \int_0^1 q(x)g(x,t)dx \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

и выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} \int_0^1 q(x)\phi(x)dx + \int_0^T p_1(t)h_1(t)dt &= h_1(0), \\ \int_0^1 q(x)\psi(x)dx + \int_0^T p_2(t)h_1(t)dt &= h_1'(0), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\phi(0) + \int_0^T p_1(t)h_2(t)dt = h_2(0), \quad \psi(0) + \int_0^T p_2(t)h_2(t)dt = h_2'(0). \quad (7)$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t), a(t)$ и $b(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(5), из (1)-(3) и

$$\begin{aligned} a(t)h_1(t) + b(t) \int_0^1 q(x)g(x,t)dx + \int_0^1 q(x)f(x,t)dx &= h_1''(x,t) - \int_0^1 q(x)u_{xx}(x,t)dx - \\ - \int_0^1 q(x)u_{ttxx}(x,t)dx + \int_0^1 q(x)u_{xxxx}(x,t)dx + \int_0^1 q(x)u_{ttxxx}(x,t)dx & \quad (0 \leq t \leq T), \quad (8) \\ a(t)h_2(t) + b(t)g(0,t) + f(0,t) &= \end{aligned}$$

$$=h_2''(x,t)-u_{xx}(0,t)-u_{ttxx}(0,t)+u_{xxxx}(0,t)+u_{ttxxxx}(0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (9)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (8), (9) удовлетворяют следующим условиям:

$$1. \quad \phi(x) \in C^4[0,1], \quad \phi^{(5)}(x) \in L_2(0,1), \quad \phi'(0) = \phi(1) = \phi'''(0) = \phi''(1) = \phi^{(4)}(1) = 0'.$$

$$2. \quad \psi(x) \in C^4[0,1], \quad \psi^{(5)}(x) \in L_2(0,1), \quad \psi'(0) = \psi(1) = \psi'''(0) = \psi''(1) = \psi^{(4)}(1) = 0.$$

$$3. \quad f(x,t) \in C(D_T), \quad f_x(x,t) \in L_2(D_T), \quad f(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

$$4. \quad g(x,t) \in C(D_T), \quad g_x(x,t) \in L_2(D_T), \quad g(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

$$5. \quad q(x) \in L_2(0,1), \quad p_i(t) \in C[0,T], \quad h_i(t) \in C^2[0,T] \quad (i=1,2),$$

$$h(t) \equiv h_1(t)g(0,t) - h_2(t) \int_0^1 q(x)g(x,t)dx \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

Можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1-5. Тогда при малых значениях $T + \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]}$ задача (1)-(3), (8), (9) имеет единственное решение.

В силу теоремы 1, из теоремы 2 немедленно вытекает однозначная разрешимость задачи (1)-(5).

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и выполняются условия согласования (6), (7). Тогда при малых значениях $T + \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]}$ задача (1)-(5) имеет единственное решение.

Список литературы

1. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Доклады Академии наук СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск : Наука, 1962. 92 с.
3. Иванов В. К. О линейных некорректных задачах // Доклады Академии наук СССР. 1962. Т. 145, № 2. С. 270–272.
4. Schneider G., Eugene C. W. Kawahara dynamics in dispersive media // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2001. P. 152–153 ; P. 384–394.
5. Wang Y. Existence and blow-up of solution of Cauchy problem for the sixth order damped Boussinesq equation // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 2017. Vol. 43, № 5. P. 1057–1071.
6. Farajov A. S. On a non-local boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance // Transactions of Azerbaijan Ped. Univ. Ser. of math. and natural sciences. 2021. Vol. 69, № 2. P. 22–33.

7. Фараджев А. С. Задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией и нелокальными интегральными условиями // *Proceedings of IAM*. 2021. Т. 10, № 2. С. 135–148.

8. Фараджев А. С. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения с частными производными шестого порядка с нелокальными условиями // *Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVI Междунар. науч.-техн. конф.* Пенза, 2021. С. 57–62.

9. Камынин В. Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // *Математические заметки*. 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217.

10. Камынин В. Л. Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости // *Математические заметки*. 2020. Т. 107 (1). С. 74–86.

11. Кожанов А. И. Обратные задачи определения параметра поглощения в уравнении диффузии // *Математические заметки*. 2019. Т. 106 (3). С. 395–408.

12. Мегралиев Я. Т., Фараджев А. С. О разрешимости обратной краевой задачи для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией // *Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики : материалы XIV Междунар. конф., приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета (16–19 сентября 2021 г.)*. Махачкала, 2021. С. 156–158.

13. Farajov A. S. Inverse boundary value problem for the sixth-order Bousinesq equation with double variance // *News Of Baku University. Series of physico-mathematical sciences*. 2021. № 3. P. 16–27.

**Математическое моделирование
нелинейно-оптических процессов смешения
терагерцовых волн в графеновых метаповерхностях**

**Александр Михайлович Лерер¹, Галина Степановна Макеева²,
Владимир Владимирович Черепанов³**

^{1,3}Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

²Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹lerer@sfedu.ru, ²radiotech@pnzgu.ru, ³vcherepanov@sfedu.ru

Аннотация. Разработан численно-аналитический метод решения нелинейной задачи дифракции для уравнений Максвелла (с моделью нелинейной поверхностной проводимости графена третьего порядка) с целью моделирования нелинейно-оптических процессов смешения терагерцовых (ТГц) волн в многослойных метаповерхностях из графеновых нанолент. С помощью разработанного вычислительного алгоритма проведено численное моделирование эффективности нелинейного смешения ТГц-волн в многослойных графеновых метаповерхностях в зависимости от химического потенциала и угла падения волн накачки и сигнала.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача дифракции, нелинейная поверхностная проводимость графена третьего порядка, эффективность нелинейного смешения ТГц-волн

**Mathematical Modeling of Nonlinear Optical Processes
of Terahertz Wave Mixing in Graphene Metasurfaces**

Aleksandr M. Lerer¹, Galina S. Makeeva, Vladimir V. Cherepanov³

^{1,3}Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

²Penza State University, Penza, Russia

¹lerer@sfedu.ru, ²radiotech@pnzgu.ru, ³vcherepanov@sfedu.ru

Abstract. A numerical-analytical method has been developed for solving the nonlinear diffraction problem for the Maxwell's equations (with a model of third-order nonlinear surface conductivity of graphene) in the goal to simulate nonlinear optical processes of mixing of terahertz (THz) waves in multilayer metasurfaces of graphene nanoribbons. Using the developed computational algorithm, we numerically simulate the efficiency of nonlinear THz wave mixing in multilayer graphene metasurfaces as a function of the chemical potential and the angle of incidence of the pump and signal waves.

Keywords: nonlinear boundary diffraction problem, third-order nonlinear surface conductivity of graphene, efficiency of nonlinear THz wave mixing

Введение

Графен - один из наиболее перспективных двумерных материалов для функциональных электромагнитных компонент [1]. Комбинированная синергия экстремального усиления плазмонного поля и большой внутренней оптической нелинейности мотивирует интенсивные исследования в области нелинейной графеновой плазмоники [2]. Графен демонстрирует исключительно сильное взаимодействие ТГц излучения с веществом и регулируемые затвором нелинейные оптические свойства, начиная от генерации разностной частоты на основе нелинейностей второго порядка до генерации третьей гармоники [3-5] и четырехволнового смешения [1, 6] на основе нелинейности третьего порядка для таких приложений, как оптические параметрические усилители, генераторы, переключатели, преобразователи частоты и детекторы [6]. Сильное взаимодействие с излучением в диапазоне от ТГц до ультрафиолетового излучения, наряду с другими уникальными свойствами, такими как высокая теплопроводность и подвижность носителей, делают графен предпочтительным материалом для будущего нелинейного преобразования ТГц частот, оптического управления и обработки информации [7].

В наших предыдущих работах [8, 9] с помощью созданного вычислительного алгоритма показана возможность повышения эффективности генерации третьей гармоники многослойными графеновыми плазмонными структурами в области низких ТГц частот. В данной работе с помощью разработанного численно-аналитического метода, основанного на решении нелинейной краевой задачи дифракции, анализируем эффективность нелинейно-оптических процессов смешения ТГц волн в многослойных графеновых метаповерхностях.

1. Математическая модель

Математическая модель нелинейного смешения волн ТГц диапазона в многослойных графеновых метаповерхностях основана на решении нелинейных краевых задач дифракции для уравнений Максвелла с моделью нелинейной поверхностной проводимости графена третьего порядка.

Исследуемые многослойные метаповерхности (элементарная ячейка представлена на рис.1) состоят из нескольких ($N=3$) 2D решеток ($d_x = d_y$ – периодичность вдоль осей x, y) графеновых лент конечной длины (w – размер), расположенных на разделительных диэлектрических слоях (SiO_2) с показателем преломления $n = 1.45$, толщиной h , на полубесконечной подложке (Al_2O_3 $n = 1.77$). Параметры графена: $T = 300$ К и $\tau = 1$ ps.

Предположим, что две плоские однородные электромагнитные волны: волна накачки с частотой ω_1 (амплитуды $E_1(\omega_1)$) и сигнальная волна с частотой ω_2 (амплитуды $E_2(\omega_2)$) падают (θ - угол падения) на многослойную метаповерхность из графеновых нанолент.

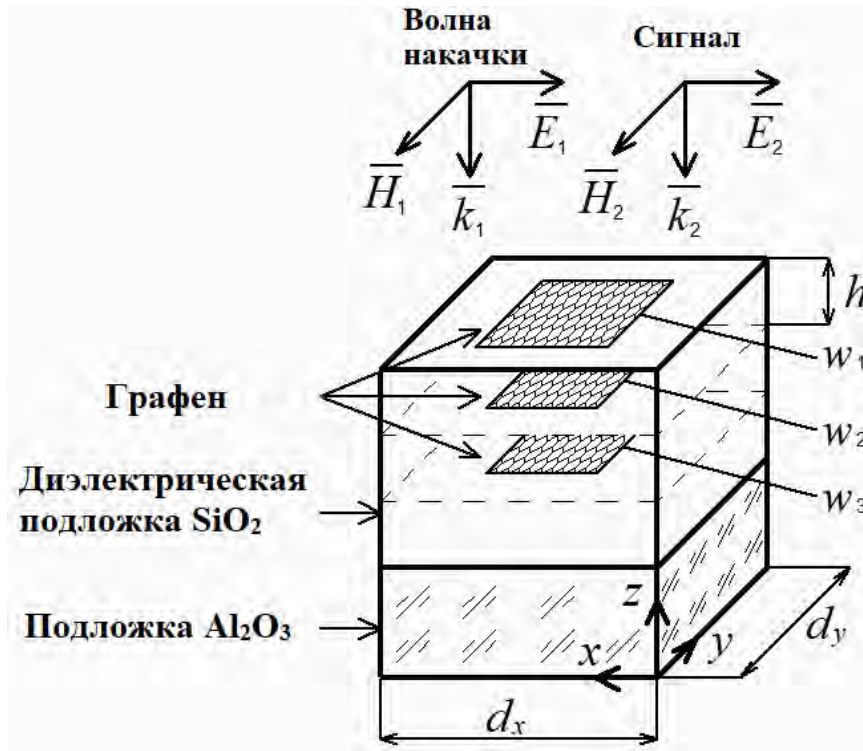


Рис. 1. Геометрия задачи дифракции: топология элементарной ячейки графеновой метаповерхности, состоящей из графеновых нанолент; направления падающих волн накачки и сигнала; d_x , d_y - периодичность; w - размер графеновой наноленты; h - толщина разделительного диэлектрика

Из эффектов третьего порядка, за которые в объемных материалах ответственна нелинейная поляризации третьего порядка, в настоящей работе рассмотрим четырехчастотное взаимодействие при нелинейной дифракции волн на решетке графеновых нанолент в отличие от генерации третьей гармоники, рассчитанной в наших предшествующих работах [8,9].

Графен представляет собой сверхтонкий материал толщиной в один атом, и его точнее моделировать как поверхностный ток, а не объемную среду.

Считая характер взаимодействия нелинейным, запишем выражение для тока

$$\vec{j} = \sigma^{(1)} \vec{E}_\Sigma + \sigma^{(2)} \vec{E}_\Sigma \vec{E}_\Sigma + \sigma^{(3)} \vec{E}_\Sigma \vec{E}_\Sigma \vec{E}_\Sigma, \quad (1)$$

где $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \vec{E}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, $\sigma^{(1)}$ - линейная поверхностная проводимость графена, $\sigma^{(2)}$ и $\sigma^{(3)}$ - нелинейные поверхностные проводимости графена второго и третьего порядков.

Учитывая ряд допущений, а именно - центральную симметрию кристаллической решетки графена, отсутствие нормальной составляющей электрического поля падающих волн, субволновой объем взаимодействия и учитывая одинаковую поляризацию волн накачки и сигнала,

нелинейность второго порядка $\sigma^{(2)}$ учитывать не будем, В этом случае выражение для нелинейного поверхностного тока графена (1) имеет вид

$$j_{nl} = \sigma^{(3)} \left| E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \right|^2 \times \\ \times \left[E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \right], \quad (2)$$

где нелинейная проводимость графена третьего порядка $\sigma^{(3)}$ определяется формулой Михайлова [11].

Раскрывая (2), получим

$$j_{nelin} = \sigma^{(3)} \left(\frac{3}{4} |E_1|^2 E_1 \cos \omega_1 t + \frac{1}{4} |E_1|^2 E_1 \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{2} |E_1|^2 E_2 \cos \omega_2 t + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} |E_1|^2 E_2 \cos(2\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{4} |E_1|^2 E_2 \cos(2\omega_1 - \omega_2)t \right) \quad (3)$$

.В случае вырожденного четырехволнового смешения частоты двух падающих (ω_1, ω_2) и третьей генерируемой (ω_3) волны подчиняются соотношению $\omega_3 = 2\omega_1 \pm \omega_2$, где индекс 3 представляет сгенерированную холостую волну, возникающую из-за нелинейной поляризации третьего порядка. При выборе частоты сигнала ω_2 близкой к удвоенной частоте накачки ω_1 , комбинационная частота $\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2$ будет находиться в ТГц диапазоне частот.

Учитывая субволновый объем графена, полагаем условие согласования фаз взаимодействующих волн в виде $\varphi_1 = \varphi_2$, и учитывая соотношение для амплитуд $E_{2,0} \ll E_{1,0}$, нелинейный вклад может быть охарактеризован нелинейным поверхностным током, определяемым как

$$j_{nl}(2\omega_1 - \omega_2) = \sigma_3(\omega_1, \omega_1, -\omega_2) \frac{1}{4} |E_1|^2 E_2 \cos(2\omega_1 - \omega_2)t. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что нелинейные свойства графена определяются интенсивностью волны накачки (определяется $|E_1|^2$) и нелинейной проводимостью третьего порядка $\sigma^{(3)}$. В случае, когда энергии фотонов $\hbar\omega_1$ мощной падающей волны накачки достаточно лишь для внутризонных переходов зарядов из валентной зоны в зону проводимости, в соответствии с предложенными моделями Михайлова [11], нелинейную проводимость $\sigma^{(3)}$ можно аппроксимировать формулами

$$\sigma^{(3)}(\omega_1, \omega_1, -\omega_2) = \frac{e^4 V_F^2}{8\pi\mu_c \hbar^2 (\omega_1 + i\tau^{-1})(\omega_1 + i\tau^{-1})(-\omega_2 + i\tau^{-1})}, \quad (5)$$

где e - заряд электрона, μ_c - химический потенциал графена, $v_F = 10^6$ м/с - скорость Ферми, ω_1, ω_2 - частоты падающих волн сигнала и

накачки, $\hbar$ – приведенная постоянная Планка. Формула (5) соответствует комбинационной частоте $\omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2$.

Для решения нелинейной задачи дифракции разработан численно-аналитический подход, в котором используется метод возмущений. Сначала решается линейная задача дифракции двумя различными численными методами [11]: методом приближенных граничных условий [12] и методом решения объемных интегро-дифференциальных уравнений. [13, 14]

Разработан вычислительный алгоритм, содержащий несколько этапов:

- сначала определяются электромагнитные поля в многослойном диэлектрике по методу, описанному в [13];
- выполняются граничные условия $\mathbf{j}(\omega_{1,2}) = \sigma^{(1)} \mathbf{E}(\omega_{1,2})$ на графеновых лентах с линейной поверхностной проводимостью $\sigma^{(1)}$, определяемой формулой Кубо [15];
- в результате получена система парных интегральных уравнений (СПИУ) относительно неизвестных токов на графеновых лентах.;
- СПИУ решаются методом Галеркина [12];
- электромагнитные поля (на графеновых лентах и в дальней зоне излучения) определяются путем решения СПИУ;
- полученное решение используется для нахождения нелинейных поверхностных токов (2) на графеновых лентах и моделирования нелинейного смешения ТГц волн в многослойных графеновых метаповерхностях.

3. Результаты численного моделирования

На первом этапе рассчитаны частотные зависимости коэффициентов отражения R , прохождения T и поглощения P падающей волны сигнала f_2 в многослойной ($N = 3$) метаповерхности из графеновых нанолент (рис. 1) в линейном режиме (рис. 2а). Минимум коэффициента отражения R и максимум коэффициента поглощения P (рис. 2а) соответствуют резонансу на частоте f_{res} , определяемой возбуждением основной моды поверхностных плазмон-поляритонов (ППП) в графеновых нанолентах.

На втором этапе с помощью разработанного вычислительного алгоритма проведено моделирование процесса нелинейного смешения ТГц волн. С целью повышения эффективности нелинейного смешения ТГц волн частоты падающих волн накачки f_1 и сигнала f_2 выбраны вблизи резонансной частоты мод ППП, так что и частота и $f_3 = 2f_1 - f_2$ близка к резонансной частоте f_{res} .

На рис. 2а представлены результаты численного моделирования нелинейного смешения ТГц волн (для нормального падения): нормированной мощности генерируемой волны на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$, излучаемой в прямом (прохождение T_3) и обратном (отражение

R3) направлении как функция частоты волны сигнала. Значения коэффициентов прохождения T3 и отражения R3 рассчитываются нормированием к плотности мощности падающей волны сигнала $P1 = 10^{-3}$ мВт / мм²).

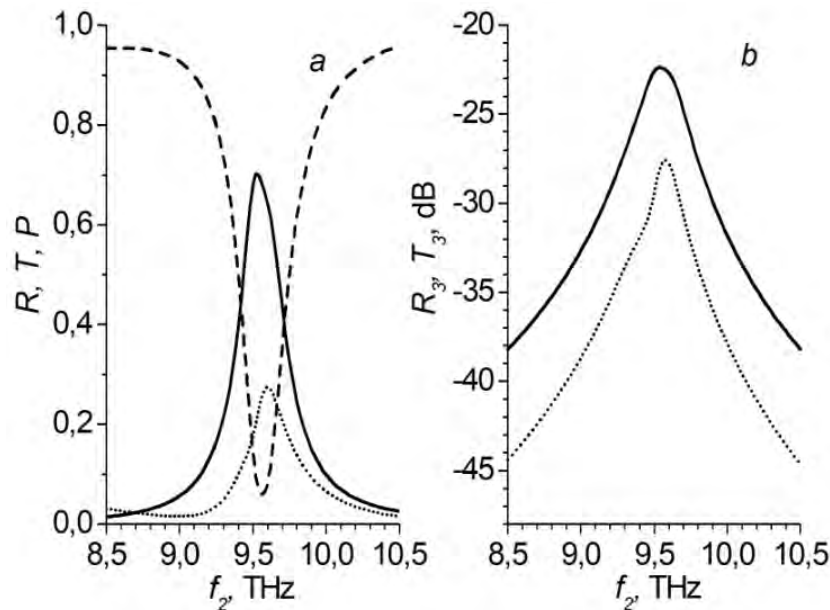


Рис. 2. Линейные спектры (а): коэффициенты отражения R (штрих-пунктирная), прохождения T (пунктирная) и поглощения P (сплошная кривая) волны сигнала и эффективность нелинейного смешения ТГц волн (б) в многослойной метаповерхности из графеновых нанолент: нормированная мощность генерируемой волны на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$, излучаемой в прямом (прохождение T3 (сплошная кривая)) и обратном направлении (отражение R3 (пунктирная кривая)) в зависимости от частоты f_2 , $f_1 = 9,52$ ТГц; $\mu_c = 0,5$ эВ, $N=3$; $w_1 = 1$ мкм, $w_2 = w_3 = 0,75$ мкм, $d_x = d_y = 3$ мкм, $h = 5$ мкм

Как следует из результатов (рис. 2б), эффективность нелинейного смешения ТГц волн увеличивается на несколько порядков в условиях резонанса, когда частоты волн накачки и сигнала f_1 , f_2 и комбинационной частоты $f_3 = 2f_1 - f_2$ близки к резонансной частоте ППП $f_{res} = 9,52$ ТГц. Чрезвычайная локализация электрических полей падающих и генерируемых волн на краях графеновых лент при резонансе мод ППП значительно увеличивает нелинейное взаимодействие ТГц волн с графеном и приводит к сильному нелинейному отклику на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$.

В дополнение к типичным плазмонным эффектам, таким как усиление локального поля и ограничение поля падающих и генерируемых волн, поле может быть дополнительно усилено в многослойных метаповерхностях из графеновых нанолент. Эффекты стоячих волн из-за отражения от решеток графеновых лент, диэлектрических разделительных слоев и подложек вызывают дальнейшее увеличение электрического поля и более выраженные резонансы мод ППП на частотах f_1 , f_2 , f_3 , что

приводит к резкому возрастанию эффективности процесса нелинейного смешения ТГц волн.

Проведено численное моделирование в зависимости от химического потенциала (внешнего электрического поля смещения) и угла падения волн накачки и сигнала с учетом геометрии и размерных эффектов. На рис. 3 показана возможность управления эффективностью нелинейного смешения ТГц волн путем изменения химического потенциала графена.

Уменьшение химического потенциала приводит к уменьшению резонансной частоты (рис. 3а) и значительному увеличению эффективности нелинейного смешения ТГц волн (рис. 3б).

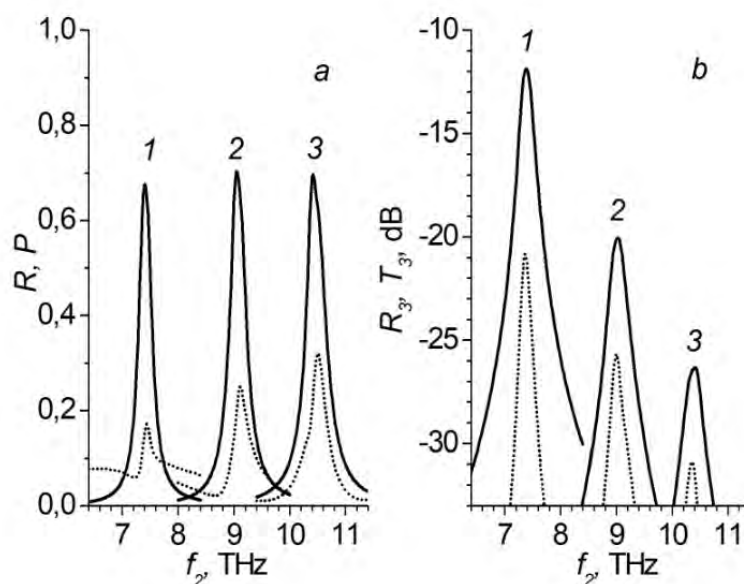


Рис. 3. Управляемость линейного (а) и нелинейного (б) спектров химическим потенциалом: коэффициенты отражения R (штрих-пунктирная) и поглощения P (сплошная) (а) и нормированная мощность генерируемой волны на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$, излучаемой в прямом (прохождение T_3 (сплошная линия)) и обратном направлении (отражение R_3 (пунктирная кривая)) (б) в зависимости от частоты f_2 : $N=3$; (1) $\mu_c = 0,3$ эВ, (2) $0,45$ эВ, (3) $0,6$ эВ; $w_1 = 1$ мкм, $w_2 = w_3 = 0,75$ мкм, $d_x = d_y = 3$ мкм, $h = 5$ мкм

Результаты расчета эффективности нелинейного смешения ТГц волн при различных отстройках $\pm \Delta f / f_1 = (f_2 - f_1) / f_1$ частоты сигнала f_2 относительно частоты накачки f_1 показаны на рис.4. (Частота накачки f_1 выбрана вблизи резонансной частоты f_{res} ППП в многослойной метаповерхности из графеновых лент $f_1 = 9,5$ ТГц). Как видно из рис.4, эффективность нелинейного смешения ТГц волн увеличивается с уменьшением отстройки $\Delta f / f_1$ (рис. 4).

На рис. 5 показаны частотные зависимости эффективности нелинейного смешения ТГц волн для различных значений угла падения волн накачки и сигнала.

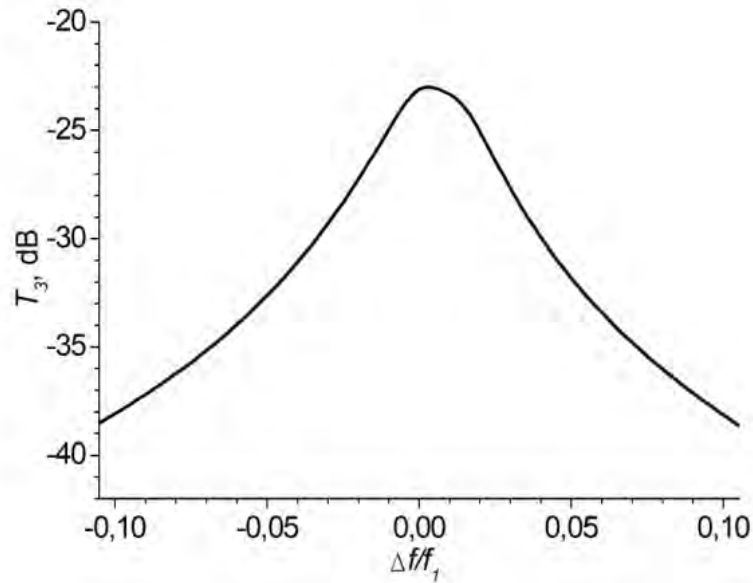


Рис. 4. Эффективность нелинейного смешения ТГц волн при различных значениях отстройки $\pm\Delta f/f_1$ частоты сигнала f_2 относительно частоты накачки f_1 . Размеры и параметры такие же, как на рис. 3

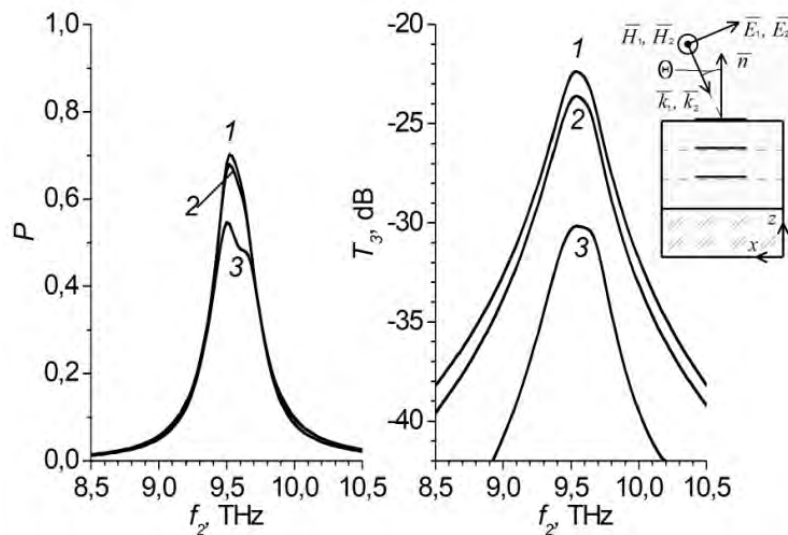


Рис. 5. Эффективность нелинейного смешения ТГц волн для различных значений угла падения волны сигнала и волны накачки: коэффициенты поглощения P падающей сигнальной волны (линейный режим) (а) нормированная мощность генерируемой волны на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$, излучаемой в прямом направлении (прохождение T_3) (б) в зависимости от частоты f_2 : кривая (1) - $\theta = 0^\circ$, (2) - $\theta = 30^\circ$, (3) - $\theta = 60^\circ$, $\mu_c = 0.5$ эВ, $f_1 = 9.52$ ТГц. Размеры и параметры графеновой метаповерхности такие же, как на рисунке 2.

Угловые зависимости эффективности нелинейного смешения ТГц волн для s- и p-поляризаций падающих волн накачки и сигнала показаны на рис. 6. Как видно из рис. 5, 6, характеристики ТГц смесителей на

основе многослойных метаповерхностей из графеновых лент имеют угловую нечувствительность в широком диапазоне углов падения ± 45 градусов по уровню -3 дБ для обоих типов поляризаций волн накачки и сигнала.

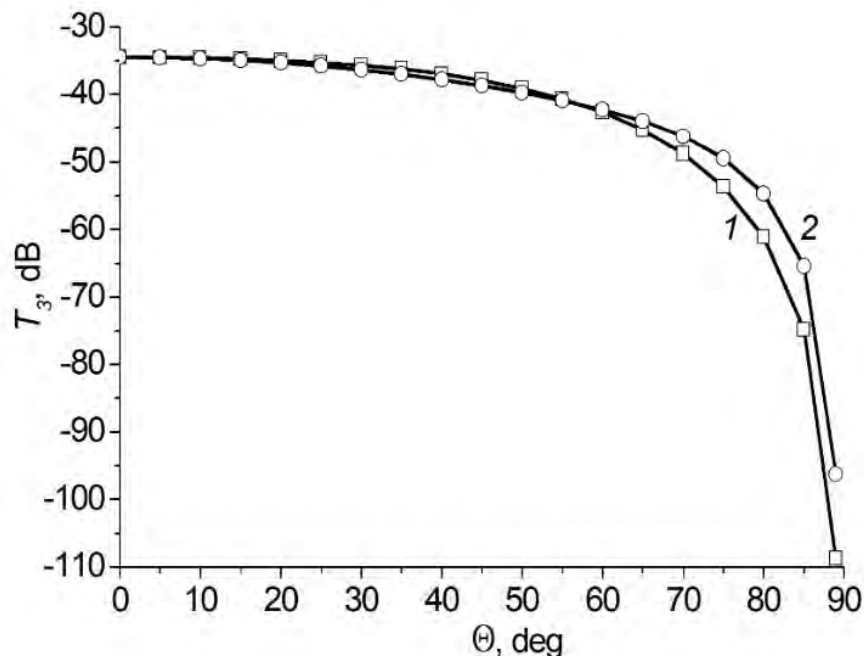


Рис. 6. Эффективность нелинейного смешения ТГц волн в зависимости от угла падения волны сигнала и волны накачки: нормированная мощность генерируемой волны на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$, излучаемой в прямом направлении (прохождение T_3) (б) в зависимости от частоты f_2 : кривая (1) - s-поляризация, кривая (2) - p- поляризация падающих волн сигнала и накачки $f_1 = 9.52$ ТГц $f_2 = 9$ ТГц ($f_3 = 10.04$ ТГц). Размеры и параметры такие же, как на рис. 3

Заключение

В данной работе с использованием разработанного численно-аналитического метода решения нелинейной задачи дифракции проанализирована эффективность механизма нелинейного смешения ТГц волн в многослойных метаповерхностях из графеновых нанолент. Показано, что в условиях резонанса, когда частоты падающих волн накачки и сигнала выбираются вблизи резонансной частоты локализованных ППП мод, происходит резонансное увеличение на несколько порядков уровня генерируемой волны на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$. Показана возможность перестройки резонансной частоты таких реконфигурируемых смесителей ТГц диапазона путем изменения химического потенциала графена без изменения его геометрии и размеров. Также продемонстрирована нечувствительность характеристик ТГц смесителей к углам падения волн накачки и сигнала в широком диапазоне значений.

Приведенные значения эффективности преобразования ТГц частот являются многообещающими для практического применения нелинейных многослойных графеновых метаповерхностей в смесителях ТГц частот, оптических переключателях и при формировании изображений сверхвысокого разрешения для широкого спектра современных технологий будущего, включая передовую спектроскопию, оптическую обработку и хранение информации, телекоммуникации, биоспектроскопию и квантовые технологии [16].

Список литературы

1. Cox J. D., Garcia de F. J., Abajo F. J. Nonlinear Graphene Nanoplasmonics // *Accounts of Chemical Research*. American Chemical Society. 2019. Vol. 52, № 9. P. 2536–2547.
2. Nasari H., Abrishamiana M. S. Electrically tunable, plasmon resonance enhanced, terahertz third harmonic generation via grapheme // *RSC Advances*. 2016. Vol. 6. P. 50190–50200.
3. Nasari H., Abrishamiana M. S. Nonlinear terahertz frequency conversion via graphene microribbon array // *Nanotechnology*. 2016. Vol. 27, № 30. P. 5202.
4. Kundys D., Van Duppen B., Marshall O. P., Rodriguez F. [et al.]. Nonlinear light mixing by graphene plasmons // *Nano Letters*. 2018. Vol. 18, № 1. P. 282–287.
5. An N., Tan T., Peng Z., Qin C., Yuan Z., Bi L., Liao C., Wang Y., Rao Y., Soavi G., Yao B. Electrically Tunable Four-Wave-Mixing in Graphene Heterogeneous Fiber for Individual Gas Molecule Detection // *Nano Letters*. 2020. Vol. 20, № 9. P. 6473–6480.
6. Jiang T., Kravtsov V., Tokman M. [et al.]. Ultrafast coherent nonlinear nanooptics and nanoimaging of graphene // *Nature Nanotechnology*. Springer Nature. 2019. Vol. 14. P. 838–843.
7. Lerer M., Makeeva G. S., Cherepanov V. V. Generation of Third Harmonic of Terahertz Waves by a Nonlinear Graphene Multilayer Metasurface // *Optics and Spectroscopy*. MAIK Nauka / Interperiodica. 2021. Vol. 129, № 1. P. 86–88.
8. Lerer M., Makeeva G. S., Cherepanov V. V. Electronically Tunable Broadband THz Frequency Multipliers Based on Multilayer Nonlinear Graphene Metasurfaces // *2020 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering (APEDE)*. Saratov, 2020. P. 269–273.
9. Mikhailov S. A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // *Physical Review. B*. 2016. Vol. 93, № 8. P. 085403.
10. Lerer M., Makeeva G. S. Polarization Effects and Resonance Absorption in Terahertz Wave Diffraction on Graphene Metasurfaces // *Optics and Spectroscopy*. 2018. Vol. 125, № 6. P. 1034–1040.
11. Лерер А. М., Иванова И. Н. Применение приближенных граничных условий для расчета планарных двумерно-периодических наноплазмонных структур // *Радиотехника и Электроника*. 2016. Т. 61, № 5. С. 435.

12. Лерер А. М. Теоретическое исследование двумерно периодических наноплазмонных структур // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57, № 11. С. 1160.

13. Lerer M., Donets I. V., Kalinchenko G. A., Makhno P. V. Volume integral method for investigation of plasmonic nanowaveguide structures and photonic crystals // Photonics. Research. 2014. Vol. 2, № 1. P. 31–37.

14. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // Journal of Applied Physics. 2008. Vol. 103, № 6. P. 064302.

15. Deinert J.-C., Alcaraz Iranzo D., Perez R., Jia X., Hafez H. A., Ilyakov I., Awari N. [et al.]. Grating-Graphene Metamaterial as a Platform for Terahertz Nonlinear Photonics // ACS Nano. 2021. Vol. 15, № 1. P. 1145–1154.

**Математическое моделирование
реконфигурируемых конвертеров частоты
инфракрасного диапазона на основе графеновых решеток**

**Александр Михайлович Лерер¹, Галина Степановна Макеева²,
Владимир Владимирович Черепанов³**

^{1,3}Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

²Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹lerer@sfedu.ru, ²radiotech@pnzgu.ru, ³vcherepanov@sfedu.ru

Аннотация. На основе решения методом возмущений нелинейной задачи дифракции для уравнений Максвелла совместно с моделью нелинейной поверхностной проводимости графена третьего порядка проведено численное моделирование нелинейного преобразования частоты инфракрасного (ИК) диапазона в многослойных решетках графеновых нанолент. Показано, что эффективность преобразования частоты в конвертерах ИК-диапазона возрастает на несколько порядков при резонансе мод поверхностных плазмонных поляритонов в графеновых нанолентах конечной длины, а также с увеличением числа слоев графеновых решеток и уменьшением величины химического потенциала. Результаты демонстрируют возможность перестройки реконфигурируемых многополосных ИК конвертеров по частоте при изменении параметров графена с помощью электрического стробирования или химического легирования.

Ключевые слова: метод возмущений, нелинейное преобразование частоты, реконфигурируемый конвертер инфракрасной частоты, многослойные решетки графеновых нанолент

**Mathematical Modeling of Reconfigurable Infrared Frequency
Converters Based on Multilayer Graphene Gratings**

Aleksandr M. Lerer¹, Galina S. Makeeva, Vladimir V. Cherepanov³

^{1,3}Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

²Penza State University, Penza, Russia

¹lerer@sfedu.ru, ²radiotech@pnzgu.ru, ³vcherepanov@sfedu.ru

Abstract. Based on the solution of the nonlinear diffraction problem for Maxwell's equations, together with the model of nonlinear third-order surface conductivity of graphene using the perturbation method, numerical simulation of the nonlinear infrared (IR) frequency conversion in multilayer gratings of graphene nanoribbons was carried out. It is shown that the efficiency of frequency conversion in IR converters increases by several orders of magnitude at resonance of surface plasmon-polariton (SPP) modes in graphene nanoribbons of finite length, as well as with an increase in the number of layers of graphene gratings and a decrease in the chemical

potential. The results demonstrate the possibility of frequency tuning of reconfigurable multiband IR converters by changing the parameters of graphene using electrical gating or chemical doping.

Keywords: perturbation method, nonlinear frequency conversion, reconfigurable IR frequency converter, multilayer grating of graphene nanoribbons

Введение

Недавно появившийся графен стал материалом, способным расширить область нелинейной плазмоники до не только терагерцового (ТГц), но и инфракрасного (ИК) диапазонов благодаря плазмонному отклику, исключительно высокой нелинейности третьего порядка, низким потерям в этих диапазонах, 2D-структуре толщиной в один атом, которая уменьшает объем взаимодействия излучения с веществом до чрезвычайно субволновых масштабов [1, 2]. Плазмоны, возбуждаемые в графене, обеспечивают беспрецедентные уровни локализации излучения. Плазмонные резонансы графена могут динамически перестраиваться с помощью электростатического смещения и позволяют создавать новое поколение реконфигурируемых плазмонных устройств, в частности ИК-биосенсоров, модуляторов, метаповерхностей и идеальных поглотителей [1]. Благодаря уникальному ограничению и частотной перестраиваемости графеновая плазмоника подходит для многих применений, включая ИК-детектирование, высокоэффективное ИК-поглощение, метаматериалы и химическое зондирование. В частности, графеновая плазмоника продемонстрировала большой потенциал в области средних ИК-длин волн, где она позволяет, например, с высокой чувствительностью и избирательностью обнаруживать молекулярные частицы по их колебательным спектрам и тепловому излучению [3].

Графен - один из самых замечательных нелинейно-оптических материалов, обладающий сильными и широкополосными нелинейными свойствами, включая ИК диапазон. Его нелинейный отклик может быть дополнительно усилен графеновыми плазмонами. Графен обладает высоким значением обычной оптической нелинейности, которая была применена для сжатия импульсов в фемтосекундных лазерах [4]. Как линейная, так и нелинейная проводимость графена легко управляется с помощью электрического или химического легирования. Графен демонстрирует чрезвычайно высокие значения пространственного сжатия света для собственных графеновых плазмонов [5].

В наших предыдущих работах [7-9] был проведен численный анализ генерации третьей гармоники ТГц-волн многослойными метаповерхностями из графеновых нанолент. Распространяя эту концепцию на ИК-частоты, в данной работе исследуем эффективность нелинейного **преобразования частоты** ИК-диапазона в многослойных графеновых решетках и характеристики **реконфигурируемых конвертеров ИК частот** на

их основе с помощью численно-аналитического метода решения нелинейной краевой задачи дифракции.

1. Математическая модель

Топология и принцип работы конвертера ИК диапазон на основе решетки графеновых нанолент показаны на рис. 1, где также представлена элементарная ячейка, которая образована графеновыми нанолентами конечной длины, расположенными на диэлектрическом слое из диоксида кремния SiO_2 толщиной h и показателем преломления $n=1.45$. Верхняя часть полупространства заполнена воздухом, снизу – полубесконечная диэлектрическая подложка из оксида алюминия Al_2O_3 с $n=1.77$.

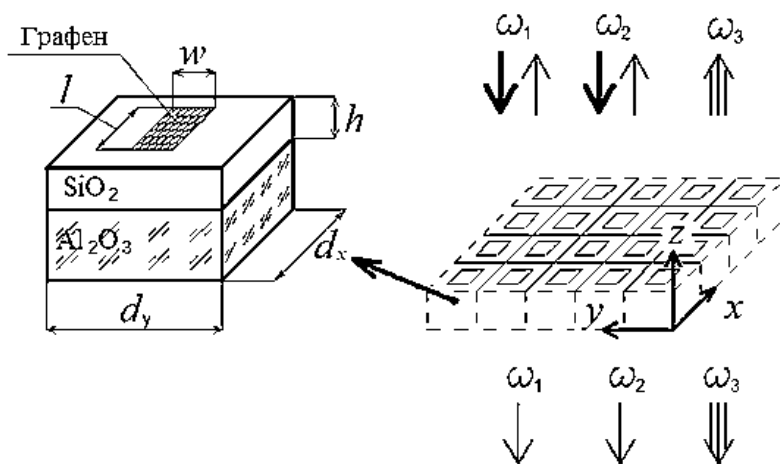


Рис. 1. Принцип работы конвертера ИК диапазон на основе решетки графеновых нанолент и элементарная ячейка решетки (графеновая нанолента на диэлектрическом слое из диоксида кремния SiO_2 толщиной h и показателем преломления $n=1.45$, снизу – диэлектрическая подложка из оксида алюминия Al_2O_3 с $n=1.77$)

Исследуемые многослойные структуры состоят из нескольких двухпериодических решеток ($d_x = d_y$ – периодичность вдоль осей x , y) квадратных графеновых лент конечной длины (w – размер), расположенных на разделительных диэлектрических слоях (рис. 1). Параметры графена: $T = 300$ К и $\tau = 1$ ps.

Геометрия задачи нелинейной дифракции показана на рис. 2.

Предположим, что две ТЕМ-волны: волна накачки с частотой ω_1 (амплитуды $E_1(\omega_1)$) и волна сигнала с частотой ω_2 (амплитуды $E_2(\omega_2)$) падают (θ – угол падения) на решетку из графеновых нанолент (элементарная ячейка представлена на рис.2 б)).

В результате взаимодействия внешнего поля падающей волны с графеном в нем возникает поверхностный ток $\vec{j}$. При нелинейном характере взаимодействия, зависящем от амплитуд падающих волн $\vec{E}$, в

выражении для тока $\vec{j}$ появляются дополнительные слагаемые, ответственные за нелинейные эффекты:

$$\vec{j} = \sigma^{(1)} \vec{E} + \sigma^{(2)} |\vec{E}| \vec{E} + \sigma^{(3)} |\vec{E}|^2 \vec{E} + \dots \quad (1)$$

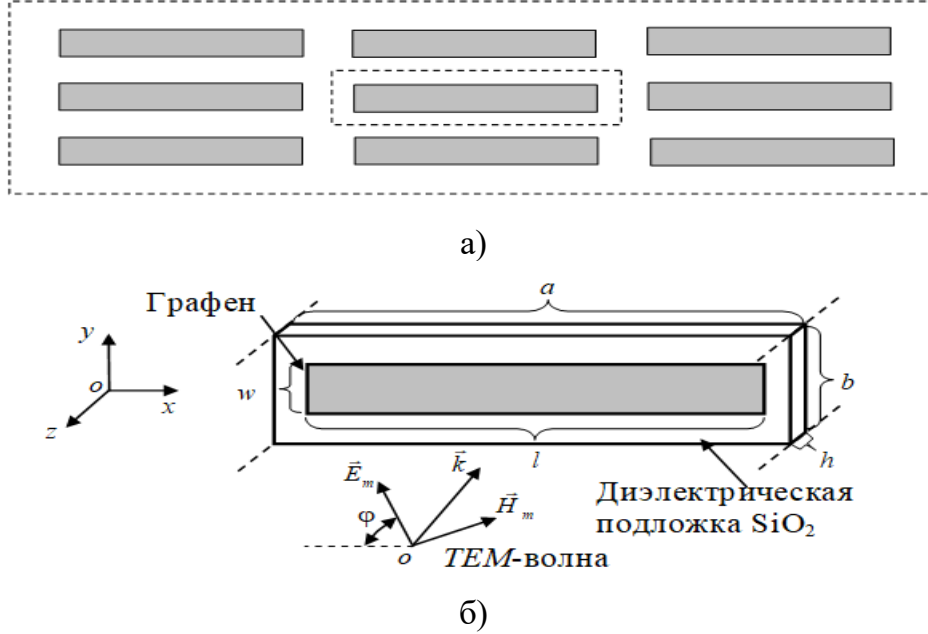


Рис. 2. Геометрия задачи нелинейной дифракции: а) 2D решетка графеновых нанолент; б) элементарная ячейка решетки и ориентация векторов поля падающих ТЕМ-волн накачки и сигнала с волновым вектором $\mathbf{k}$; a, b - период структуры; w - ширина, l - длина наноленты графена; h - толщина диэлектрической подложки

Поскольку графен имеет центрально симметричную структуру и у поля падающей волны отсутствует нормальная электрическая компонента, в разложении (2) четные слагаемые можно не учитывать, вследствие малости. В этом случае поверхностная проводимость графена

$$\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} |\vec{E}(x, y, t)|^2,$$

где $\sigma^{(1)}$ - линейная проводимость, определяемая формулой Кубо, $\sigma^{(3)}$ - нелинейная поверхностная проводимость третьего порядка.

Нелинейный поверхностный ток графена

$$j_{nl} = \sigma^{(3)} \left| E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \right|^2 \times \\ \times \left[E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \right], \quad (2)$$

где $\sigma^{(3)}$ - нелинейная проводимость третьего порядка определяется формулой Михайлова [11].

В случае нелинейного смещения волн частоты двух падающих волн накачки и сигнала (f_1, f_2) и третьей генерируемой (f_3) удовлетворяют соотношению для комбинационной частоты $f_3 = 2f_1 - f_2$. Двумерность графена также упрощает требования к согласованию фаз взаимодействующих волн. Поэтому, полагая $\varphi_1 = \varphi_2$ и учитывая, что амплитуда волны накачки значительно больше амплитуды волны сигнала $E_1 \gg E_2$, можно представить (2) в виде

$$j = \sigma^{(1)} [E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] + \\ + \sigma^{(3)} |E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)|^2 \times [E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)], \quad (3)$$

В общем случае для частот от ТГц до оптического диапазона нелинейная поверхностная проводимость третьего порядка $\sigma^{(3)}$ графена определяется формулой Михайлова, основанной на квантовой теории [10].

Использование этой формулы целесообразно, если энергии фотонов $\hbar\omega_1, \hbar\omega_2$ имеют порядок уровня Ферми μ_c , и в этом случае необходимо учитывать вклад межзонных переходов носителей, а также эффекты многофотонного поглощения.

В среднем ИК-диапазоне при длине волны около десяти микрометров, если значение химического потенциала $\mu_c \gtrsim 0.4$ эВ, можно использовать приближенную формулу, которая учитывает вклад в нелинейную проводимость графена $\sigma^{(3)}$ только внутризонных переходов в графене [10]:

$$\sigma^{(3)}(\omega_1, \omega_1, -\omega_2) = \frac{e^4 v_F^2}{8\pi\mu_c \hbar^2 (\omega_1 + i\tau^{-1})(\omega_1 + i\tau^{-1})(-\omega_2 + i\tau^{-1})}, \quad (4)$$

где $v_F = 10^6$ м/с – скорость Ферми, τ - время релаксации, ω_1, ω_2 – частоты волн накачки и сигнала.

Математическая модель нелинейного преобразования частоты ТГц и ИК диапазонов многослойными графеновыми решетками основана на решении нелинейных краевых задач дифракции для уравнений Максвелла с моделью нелинейной поверхностной проводимости графена третьего порядка.

Решение нелинейной задачи дифракции осуществляется в два этапа. На первом этапе решается задача линейной дифракции при $\sigma^{(3)} = 0$. На втором этапе, используется метод возмущений – поле, найденное на первом, подставляем в выражение для нелинейного тока (3). Далее находим поле на комбинационной частоте, излучаемое в прямом и обратном направлениях.

Подробный вычислительный алгоритм представлен в [11]. Проверка результатов проводилась путем сравнения решений, полученных различными численными методами: методом приближенных граничных

условий [12] и методом решения объемных интегро-дифференциальных уравнений [13, 14].

2. Результаты моделирования характеристик конвертеров ИК частот

Исследуемые конвертеры состоят из нескольких слоев ($N = 2, 3, 5$) двумерно-периодических решеток ($d_x = d_y$ – периодичность вдоль осей x, y) графеновых нанолент (с различными размерами w в разных слоях), расположенных на диэлектрике (SiO_2) с показателем преломления $n = 1.45$ на полубесконечной подложке с $n = 1.77$ (Al_2O_3). Параметры графена: $\tau = 1$ ps, $T = 300$ K. Элементарная ячейка многослойной графеновой решетки показана на рис.1)

На первом этапе рассчитаны характеристики ИК конвертера частоты на основе многослойных ($N = 2$) графеновых решеток в линейном режиме - спектры отражения R , прохождения T и поглощения P для графеновых решеток в зависимости от длины волны сигнала λ_2 (рис. 2) Минимумы коэффициента отражения R и максимумы коэффициента поглощения P соответствуют резонансам на длине волны λ_{res} , определяемым возбуждением основной моды поверхностных плазмонно-поляритонов (ППП) в графеновых нанолентах конечной длины. При резонансе резко возрастают как линейные, так и нелинейные поверхностные токи.

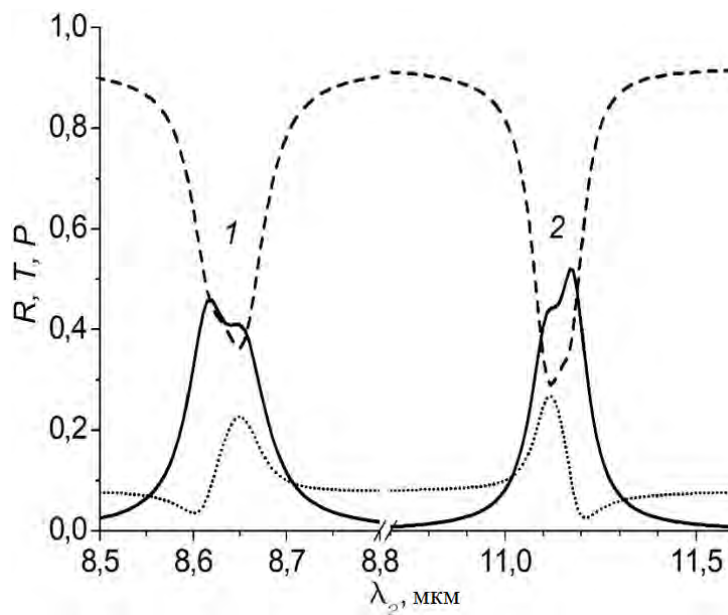


Рис. 2. Характеристики ИК конвертера частоты в линейном режиме: коэффициенты отражения R (штрих-пунктирная), прохождения T (пунктирная) и поглощения P (сплошная кривая) в зависимости от λ_2 для фиксированной λ_1 : (1) $\mu_c = 0.4$ эВ, $w_1 = 60$ нм, $w_2 = 44$ нм, $d_x = d_y = 200$ нм, $h = 1.5$ мкм, $\lambda_1 = 8.62$ мкм, $P_1 = 10^{-8}$ мВ/мм²; (2) $\mu_c = 0.4$ эВ, $w_1 = 100$ нм, $w_2 = 75$ нм, $d_x = d_y = 300$ нм, $h = 2$ мкм, $\lambda_1 = 11.17$ мкм, $N = 2$; $P_1 = 10^{-7}$ мВ/мм²

На втором этапе с использованием разработанного вычислительного алгоритма проведено моделирование нелинейных характеристик ИК конвертеров частоты на основе многослойных ($N = 2$) графеновых решеток. Результаты моделирования эффективности преобразования частоты: нормированная мощность генерируемой волны на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$, излучаемой в прямом (прохождение T_3) и обратном (отражение R_3) направлении как функция λ_2 для фиксированной λ_1 приведены на рис. 3 для нормального падения волн. Значения коэффициентов прохождения T_3 и отражения R_3 рассчитываются нормированием к плотности мощности падающей волны сигнала P_1 .

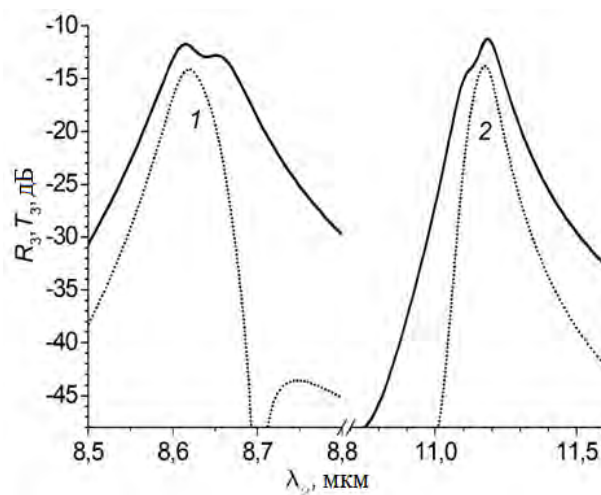


Рис. 3. Эффективность преобразования частоты в зависимости от λ_2 для фиксированной λ_1 : нормированная мощность генерируемой волны на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$, излучаемой в прямом (прохождение T_3 (сплошная)) и обратном направлении (отражение R_3 (штрих-пунктирная кривая)): (1) $\mu_c = 0.4$ эВ, $w_1 = 60$ нм, $w_2 = 44$ нм, $d_x = d_y = 200$ нм, $h = 1.5$ мкм, $\lambda_1 = 8.62$ мкм, $P_1 = 10^{-8}$ мВ/мм²; (2) $\mu_c = 0.4$ эВ, $w_1 = 100$ нм, $w_2 = 75$ нм, $d_x = d_y = 300$ нм, $h = 2$ мкм, $\lambda_1 = 11.17$ мкм, $N = 2$: $P_1 = 10^{-7}$ мВ/мм²

Как видно из рис. 3, мощность генерируемой волны возрастает на несколько порядков в условиях резонанса ППП, когда длины волн накачки λ_1 и сигнала λ_2 и длина волны λ_3 генерируемой на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$, близки к резонансной длине волны λ_{res} .

Результаты моделирования управляемости характеристик конвертера частоты ИК диапазона для различных значений химического потенциала μ_c в зависимости от λ_2 (на резонансах ППП графеновой решетки) показаны на рис. 4 и демонстрируют возможность перестройки реконфигурируемого ИК конвертера по частоте.

Уменьшение химического потенциала μ_c приводит к увеличению резонансной длины волны и значительному увеличению эффективности (рис. 4). Изменение параметров графена с помощью электрического стробирования или химического легирования может быть использовано для перестройки реконфигурируемого ИК конвертера по частоте при

изменения резонансов ППП в многослойных графеновых решетках в большом интервале длин волн.

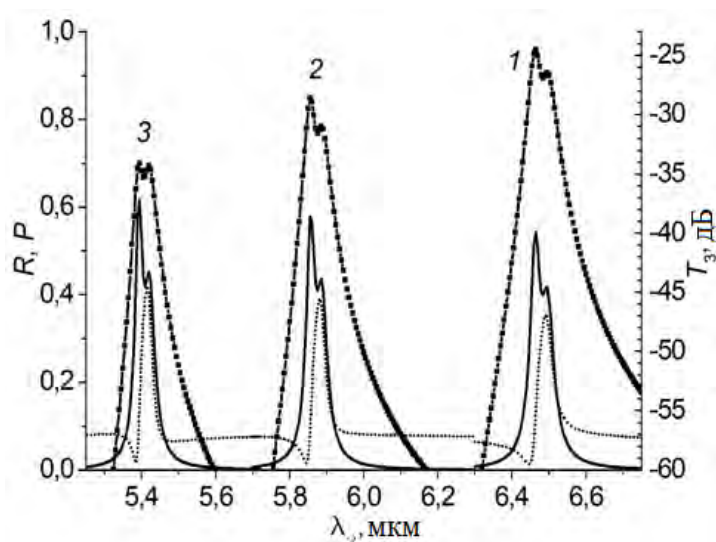


Рис. 4. Управляемость характеристик реконфигурируемого ИК конвертера частоты: коэффициенты отражения R (штрих-пунктирная), поглощения P (сплошная) и нормированная мощность генерируемой на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$ волны T_3 (точечная кривая) в зависимости от λ_2 для различных значений химического потенциала μ_c и λ_1 : (1) $\mu_c = 0.7$ эВ, $\lambda_1 = 6.47$ мкм; (2) $\mu_c = 0.85$ эВ, $\lambda_1 = 5.86$ мкм; (3) $\mu_c = 1$ эВ, $\lambda_1 = 5.4$ мкм; $w_1 = 60$ нм, $w_2 = 44$ нм, $d_x = d_y = 200$ нм, $h = 1$ мкм, $N = 2$; $P_1 = 10^{-8}$ мВ/мм²

Результаты моделирования эффективности преобразования частоты и линейные спектры поглощения в зависимости от λ_2 при фиксированной $\lambda_1 = 15,69$ мкм для различного числа слоев ($N = 1, 3$) графеновых решеток показаны на рис. 5. Как следует из результатов, с увеличением числа слоев графеновых решеток эффективность преобразования частоты может быть увеличена на несколько порядков (рис. 5).

На рис. 6 показаны линейные и нелинейные спектральные характеристики конвертера ИК диапазона для различных углов падения волн сигнала и накачки.

Угловые зависимости эффективности преобразования частоты для s - и p-поляризации падающих волн сигнала и накачки показаны на рисунке 7.

Проведено моделирование эффективности преобразования частоты как функции отстройки частоты $\pm \Delta f/f_1 = (f_2 - f_1)/f_1$ волны сигнала f_2 по отношению к частоте волны накачки f_1 (фиксированная $\lambda_{\text{res}} = 8.62$ мкм выбрана вблизи резонансной длины волны λ_{res} многослойной графеновой решетки).

Результаты моделирования расчета зависимостей эффективности преобразования частоты ИК диапазона от отстройки частоты приведены на рисунке 8.

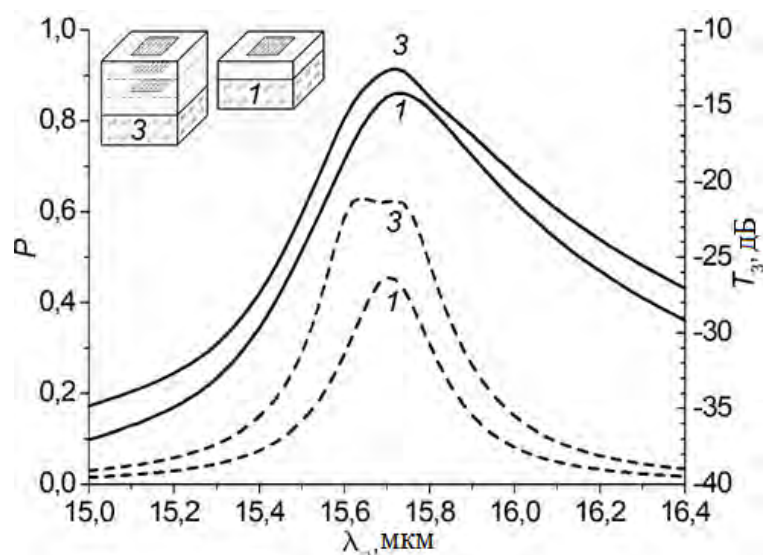


Рис. 5. Эффективность преобразования частоты и линейные спектры поглощения для различного числа слоев графеновых решеток: коэффициент поглощения P (пунктирные) и нормированная мощность генерируемой на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$ волны T_3 (сплошная линия) в зависимости от λ_2 для фиксированной $\lambda_1 = 15.69$ мкм: (1) – однослойные, $w_1 = 200$ нм; (3) – трехслойные, $w_1 = 200$ нм, $w_2 = 148$ нм, $w_3 = 150$ нм; $\mu_c = 0.4$ эВ, $d_x = d_y = 500$ нм, $h = 2.7$ мкм, $P_1 = 10^{-6}$ мВ/мм²

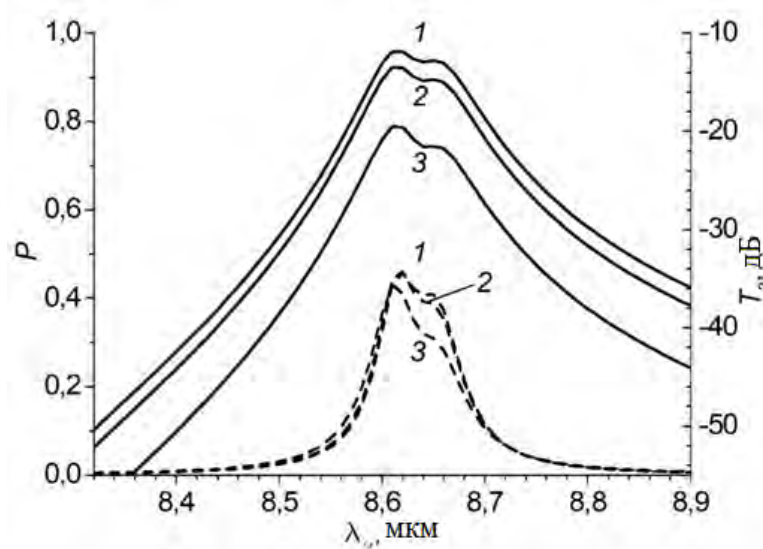


Рис. 6. Эффективность преобразования частоты и линейные спектры поглощения для различных углов падения θ волн сигнала и накачки: коэффициент поглощения P (пунктирные и нормированная мощность генерируемой на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$ волны T_3 (сплошные линии) в зависимости от λ_2 для фиксированных $\lambda_1 = 8.62$ мкм: кривая (1) - $\theta = 0^\circ$, (2) - $\theta = 30^\circ$, (3) - $\theta = 60^\circ$. $\mu_c = 0.4$ эВ, $w_1 = 60$ нм, $w_2 = 44$ нм, $d_x = d_y = 200$ нм, $h = 1.5$ мкм, $N = 2$, $P_1 = 10^{-8}$ мВ/мм²

Результаты расчета эффективности преобразования частоты 5-слойной графеновой метаповерхностью в зависимости от λ_2 для различ-

ных значений длины волны накачки λ_1 , реализующих резонансы ППП, показаны на рис. 9 и демонстрируют многополосные линейные и нелинейные спектральные характеристики реконфигурируемого ИК конвертера на основе многослойных графеновых решеток.

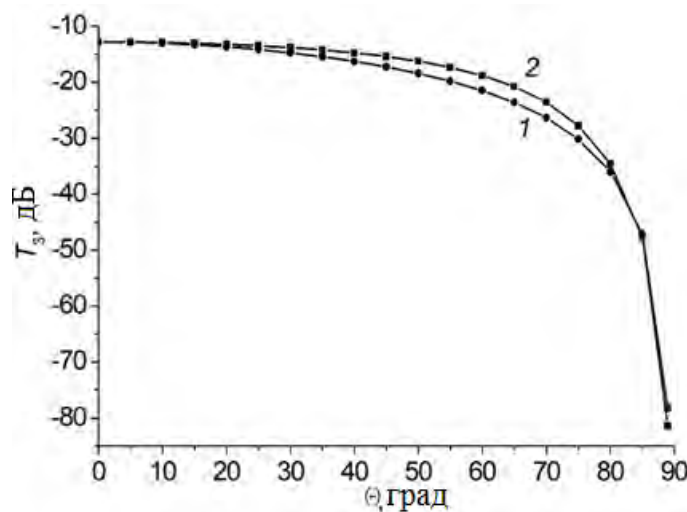


Рис. 7. Зависимости эффективности преобразования частоты от угла падения θ : кривая 1 - *s*-поляризация, 2 - *p*-поляризация как волн сигнала, так и волн накачки; $\lambda_1 = 8.62 \mu\text{m}$, $\lambda_2 = 8.65 \mu\text{m}$ ($\lambda_3 = 8.59 \mu\text{m}$).

Размеры и параметры такие же, как на рис. 6

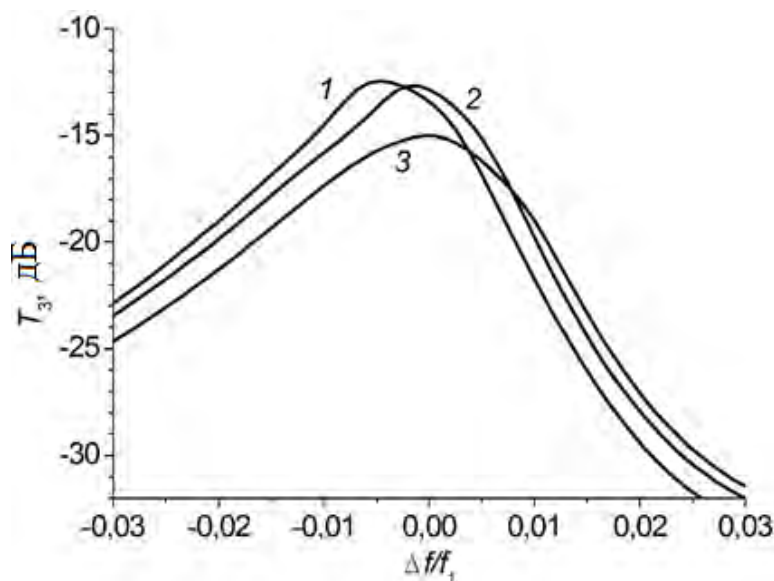


Рис. 8. Эффективность преобразования частоты как функция отстройки $\pm \Delta f/f_1 = (f_2 - f_1)/f_1$ от частоты сигнала f_2 относительно частоты накачки f_1 для фиксированной λ_1 : (1) $\lambda_1 = 15.64 \mu\text{m}$, (2) $\lambda_1 = 15.7 \mu\text{m}$, (3) $\lambda_1 = 15.75 \mu\text{m}$; $\mu_c = 0.4 \text{ эВ}$, $w_1 = 200 \text{ нм}$, $w_2 = 148 \text{ нм}$, $w_3 = 150 \text{ нм}$, $d_x = d_y = 500 \text{ нм}$, $h = 2.7 \mu\text{m}$, $N = 2$; $P_1 = 10^{-6} \text{ мВ/мм}^2$

Таким образом, использование многополосных резонансов ППП в зависимости от геометрии многослойных графеновых решеток позволя-

ет спроектировать многополосный нелинейный спектральный отклик реконфигурируемого конвертера в среднем ИК диапазоне.

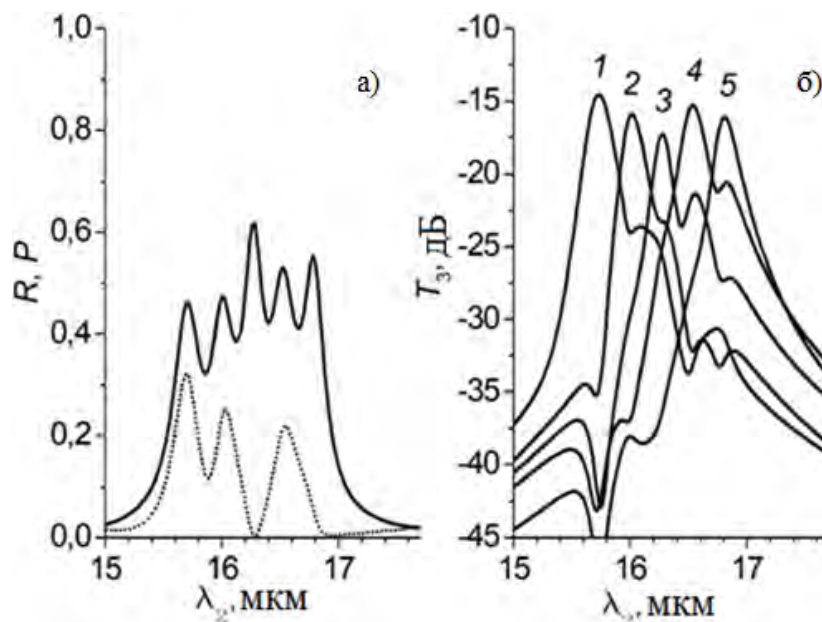


Рис. 9. Эффективность преобразования частоты и многополосные резонансы ППП: а) линейные спектры отражения R (штрих-пунктирная) и поглощения P (сплошная кривая); б) нормированная мощность генерируемой на комбинационной частоте $f_3 = 2f_1 - f_2$ волны T_3 в зависимости от λ_2 для различных значений λ_1 . Кривая (1) $\lambda_1 = 15.7$ мкм, (2) 15.99 мкм, (3) 16.27 мкм, (4) 16.52 мкм, (5) 16.79 мкм. $\mu_c = 0.4$ эВ, $w_1 = 200$ нм, $w_2 = 170$ нм, $w_3 = 165$ нм, $w_4 = 160$ нм, $w_5 = 155$ нм, $d_x = d_y = 500$ нм, $h = 2.8$ мкм, $N = 5$, $P_1 = 10^{-6}$ мВ/мм²

Список литературы

1. Rodrigo D., Tittl A., Limaj O., García de Abajo F. J., Pruneri V., Altug H. Double-layer graphene for enhanced tunable infrared plasmonics // *Light: Science & Applications*. 2017. Vol. 6. P. e16277.
2. Jin B., Argyropoulos C. Nonlinear Graphene Metasurfaces with Advanced Electromagnetic Functionalities // *Proc. of SPIE – the International Society for Optical Engineering 16, Design, Materials Fabrication, Characterization, and Applications*. 2018. P. 107221R.
3. Gopalan K. K., Paulillo B., Mackenzie D., Rodrigo D., Bareza N., Whelan P. R., Shivayogimath A., Pruneri V. Scalable and Tunable Periodic Graphene Nanohole Arrays for Mid-Infrared Plasmonics // *Nano Letters*. 2018. Vol. 18, № 9. P. 5913–5918.
4. Kundys D., Van Duppen B., Marshall O. P., Rodriguez F., Torre A., Tomadin I., Polini M., Grigorenko A. N. Nonlinear light mixing by graphene plasmons // *Nano Letters*. 2018. Vol. 18, № 1. P. 282–287.
5. Jiang T., Kravtsov V., Tokman M. [et al.]. Ultrafast coherent nonlinear nanooptics and nanoimaging of grapheme // *Nature Nanotechnology*. 2019. Vol. 14. P. 838–843.

6. Demetriou G., Bookey H. T., Biancalana F., Abraham E., Wang Y., Ji W., Kar A. K. Nonlinear optical properties of multilayer graphene in the infrared // *Optic Express*. 2016. Vol. 24. P. 13033–13043.

7. Лерер А. М., Макеева Г. С., Черепанов В. В. Генерация третьей гармоники терагерцовых волн нелинейной графеновой многослойной метаповерхностью // *Оптика и спектроскопия*. 2021. Т. 129 (1). С. 89–91. doi: 10.21883/OS.2021.01.50444.173-20

8. Lerer M., Makeeva G. S., Cherepanov V. V., Ivanova I. N. Efficiency of the Third Harmonic Generation in Multilayer Graphene Plasmon THz Structures // 2020 7th All-Russian Microwave Conference (RMC). Moscow, 2020. P. 196–199.

9. Lerer M., Makeeva G. S., Cherepanov V. V. Electronically Tunable Broadband THz Frequency Multipliers Based on Multilayer Nonlinear Graphene Metasurfaces // 2020 Int. Conf. on Actual Problems of Electron. Devices Engineering (APEDE). 2020. P. 269–273.

10. Mikhailov S. A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of grapheme // *Physical Review B*. 2016. Vol. 93, № 8. P. 085403.

11. Лерер А. М., Макеева Г. С., Черепанов В. В. Нелинейное взаимодействие терагерцовых волн с наноструктурированным графеном в резонансных многослойных плазмонных структурах // *Радиотехника и электроника*. 2021. Т. 68, № 6. С. 543–552.

12. Лерер А. М., Иванова И. Н. Применение приближенных граничных условий для расчета планарных двумерно-периодических наноплазмонных структур // *Радиотехника и электроника*. 2016. Т. 61, № 5. С. 435.

13. Лерер А. М. Теоретическое исследование двумерно периодических наноплазмонных структур // *Радиотехника и электроника*. 2012. Т. 57, № 11. С. 1160.

14. Lerer A. M., Donets I. V., Kalinchenko G. A., Makhno P. V. Volume integral method for investigation of plasmonic nanowaveguide structures and photonic crystals // *Photonic. Research*. 2014. Vol. 2, № 1. P. 31–37.

Spline-collocation methods for solving hypersingular integral equations of second kind with singular solutions

Il'ya V. Boykov¹, Alla I. Boykova², S. Faydaoglu³

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

³Dokuz Eylul University, Buca Faculty of Education, Izmir, Turkey

¹boikov@pnzgu.ru, ²boikova@pnzgu.ru, ³serife.faydaoglu@deu.edu.tr

Abstract. We study an approximate solution of a hypersingular integral equations defined on $[-1,1]$, has solutions of the form $(1-t)^{\alpha_1+i\beta_1}(1+t)^{\alpha_2+i\beta_2}\varphi(t)$, $-1 < \alpha_i < 1, i=1,2$, by a spline-collocation method with first-order splines. Here $\varphi(t)$ is a smooth function. The article is a continuation of the previous work of the authors, in which methods for approximate solution by splines of zero-order of hypersingular integral equations were considered. The solutions of these hypersingular integral equations have singularities $(1-t)^{\alpha_1+i\beta_1}(1+t)^{\alpha_2+i\beta_2}\varphi(t)$, $0 < \alpha_i < 1, i=1,2$.

Keywords: hypersingular integral equation, continuous operator method, collocation method

Сплайн-коллокационные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода с сингулярными решениями

**Илья Владимирович Бойков¹, Алла Ильинична Бойкова²,
С. Фаудаоглы³**

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

³Университет Докуз Эйлул, Педагогический
факультет Буджа, г. Измир, Турция

¹boikov@pnzgu.ru, ²boikova@pnzgu.ru, ³serife.faydaoglu@deu.edu.tr

Аннотация. Исследуются приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на сегменте $[-1,1]$ и имеющих решения вида $(1-t)^{\alpha_1+i\beta_1}(1+t)^{\alpha_2+i\beta_2}\varphi(t)$, $-1 < \alpha_i < 1, i=1,2$. Рассматриваются сплайн-коллокационные методы со сплайнами первого порядка. Здесь $\varphi(t)$ – гладкая функция. Статья является продолжением предыдущей работы авторов, в которой исследуется применение сплайн-коллокационных методов со сплайнами нулевого порядка к приближенному решению гиперсингулярных интегральных уравнений, точные решения которых имеют вид $(1-t)^{\alpha_1+i\beta_1}(1+t)^{\alpha_2+i\beta_2}\varphi(t)$, $0 < \alpha_i < 1, i=1,2$.

Ключевые слова: гиперсингулярное интегральное уравнение, непрерывный операторный метод, метод коллокаций

Introduction

Hypersingular integral equations (HIE) arise frequently in mathematical physics, acoustics, aerodynamics, mechanics, electrodynamics, elasticity, geophysics and etc. (see [1–5]). Therefore, it is a current issue to develop and justify numerical methods for approximate solutions of hypersingular integral equations. A lot of work has been devoted and continues to be done to solve such equations (see [6–10]).

The article is a continuation of the work [11], in which for the solution of a hypersingular integral equation

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t), \quad (1)$$

with solutions of the form $x(t) = (1-t)^{\beta_1}(1+t)^{\beta_2}\varphi(t)$, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$, was used a collocation method with splines of zero order.

In this article, a spline-collocation method with first-order splines is constructed for solving hypersingular integral equations (1) with solutions of the form $x(t) = (1-t)^{\beta_1}(1+t)^{\beta_2}\varphi(t)$, for $-1 < \beta_1, \beta_2 < 1$.

The notation introduced in the article [11] is used in the work.

Hypersingular integral equations with solutions as

$$x(t) = (1-t)^{\beta_1}(1+t)^{\beta_2}\phi(t), \quad 0 \leq \beta_1, \beta_2 < 1$$

Let us consider the equation (1) with solution as $x(t) = (1-t)^{\beta_1}(1+t)^{\beta_2}\varphi(t)$, $0 \leq \beta_1, \beta_2 < 1$. For simplicity of notation, we set $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

Let's introduce nodes

$$t_k = -1 + (k/N)^v, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

$$t_k = 1 - \left(\frac{2N-k}{N} \right)^v, \quad k = N+1, \dots, 2N, \quad v = 1/(1-\beta).$$

Let's introduce intervals $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, 2N-2$, $\Delta_{2N-1} = [t_{2N-1}, t_{2N}]$.

An approximate solution of the equation (1) will be sought in the form of a function

$$x_N(t) = (1-t^2)^\beta \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \psi_k(t) \quad (2)$$

with basis functions

$$\begin{aligned}
\psi_0(t) &= \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq -1 + (1/N)^{2v}, \\ -\frac{N^{2v}}{N^v - 1}t - N^v, & -1 + \left(\frac{1}{N}\right)^{2v} \leq t \leq t_1 = -1 + \left(\frac{1}{N}\right)^v; \end{cases} \\
\psi_1(t) &= \begin{cases} \frac{N^{2v}}{N^v - 1} + N^v + 1, & -1 + \left(\frac{1}{N}\right)^{2v} \leq t \leq t_1 = -1 + \left(\frac{1}{N}\right)^v, \\ \frac{1}{t_1 - t_2}t + \frac{1}{t_2 - t_1}t_2, & t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases} \\
\psi_k(t) &= \begin{cases} \frac{1}{t_k - t_{k-1}}t - \frac{1}{t_k - t_{k-1}}t_{k-1}, & t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ -\frac{1}{t_{k+1} - t_k}t + \frac{1}{t_{k+1} - t_k}t_{k+1}, & t_k \leq t \leq t_{k+1}; \end{cases} \\
\psi_{2N-1}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{t_{2N-1} - t_{2N-2}}t - \frac{1}{t_{2N-1} - t_{2N-2}}t_{2N-2}, & t_{2N-2} \leq t \leq t_{2N-1}, \\ -\frac{N^{2v}}{N^v - 1}t + N^v + 1, & t_{2N-1} \leq t \leq 1 - \left(\frac{1}{N}\right)^{2v}; \end{cases} \\
\psi_{2N}(t) &= \begin{cases} \frac{N^{2v}}{N^v - 1}t - N^v, & t_{2N-1} \leq t \leq 1 - \left(\frac{1}{N}\right)^{2v} \\ 1, & 1 - \left(\frac{1}{N}\right)^{2v} \leq t \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Let's introduce nodes

$$\bar{t}_0 = -1 + \left(\frac{1}{N}\right)^{2v}, \quad \bar{t}_k = t_k, k=1,2,\dots,2N-1, \quad \bar{t}_{2N} = 1 - \left(\frac{1}{N}\right)^{2v}.$$

The spline collocation method, built on the nodes $t_k, \bar{t}_k$, has the form

$$\begin{aligned}
& a\left(\bar{t}_k\right)(1-\bar{t}_k^2)^\beta \alpha_k + b\left(\bar{t}_k\right) \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \psi_l(\tau)}{(\tau - \bar{t}_k)^2} d\tau + \\
& + \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\beta h\left(\bar{t}_k, \tau\right) \psi_l(\tau) d\tau = f\left(\bar{t}_k\right), k=0,1,\dots,2N-1. \quad (3)
\end{aligned}$$

Let us introduce the notation

$$g_{kl} = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \psi_l(\tau)}{(\tau - \bar{t}_k)^2} d\tau,$$

$$h_{kl} = \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\beta h(\bar{t}_k, \tau) \psi_l(\tau) d\tau, \quad k, l = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

The mechanical quadrature method can be written as

$$a(\bar{t}_k) \alpha_k + b(\bar{t}_k) \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l g_{kl} + \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l h_{kl} = f(\bar{t}_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (4)$$

The system (4) is equivalent to the following

$$\left(\text{sgnb}(\bar{t}_k) \right) \left(a(\bar{t}_k) \alpha_k + b(\bar{t}_k) \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l g_{kl} + \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l h_{kl} - f(\bar{t}_k) \right) = 0, \quad (5)$$

$k = 0, 1, \dots, 2N-1$.

Analytic calculation of integrals

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \psi_l(\tau)}{(\tau - \bar{t}_k)^2} d\tau, \quad k, l = 0, 1, \dots, N-1,$$

seems to be very problematic and therefore there is a need to construct the corresponding quadrature formulas. In this case, the integrals:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \psi_l(\tau)}{(\tau - \bar{t}_k)^2} d\tau, \quad \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\beta h(\bar{t}_k, \tau) \psi_l(\tau) d\tau \quad (6)$$

for $k \neq l$, it suffices to estimate from above.

For integrals

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \psi_l(\tau)}{(\tau - \bar{t}_l)^2} d\tau, \quad \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\beta h(\bar{t}_l, \tau) \psi_l(\tau) d\tau, \quad l = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (7)$$

it is necessary to obtain upper and lower bounds, since it is not known in advance with what sign these integrals enter into the estimate of the logarithmic norm.

Denote by g_{ll}^+ the upper estimate of the integral $\int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \psi_l(\tau)}{(\tau - \bar{t}_l)^2} d\tau$,

and through g_{ll}^- the estimate of the same integral from below.

Similarly, by h_{ll}^+ we denote the upper bound for the integral

$$\int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\beta h(\bar{t}_l, \tau) \psi_l(\tau) d\tau, \quad \text{and through } h_{ll}^- \text{ its estimate from below.}$$

For definiteness, we estimate the logarithmic norm in the space R_{2N} , $2N$ -dimensional vectors $x = (x_1, \dots, x_{2N})$ with norm $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq r} |x_i|$.

Since $\text{sgn}(g_{kk}) = -1$, then the diagonal element of the system matrix (5) is equal to

$$|b_{kk}| g_{kk} + (\text{sgnb}(\overline{t_k}))(a(\overline{t_k}) + h_{kk}).$$

The remaining elements of the matrix of the system (5) are obvious. We write the system (5) in the operator formula

$$KX = F.$$

The designations K, X, F are obvious. After defining the diagonal elements, the logarithmic norm in the space R_3 is defined in the standard way.

If $\lambda(K) = -\alpha, \alpha > 0$, then by theorem in [12] $\|K^{-1}\| \leq 1/\alpha$

By analogy with [8], the following assertion is proved.

Theorem 1. Let the equation (1) with the right side f have a unique solution $x^* \in W^2$ and the logarithmic norm of the matrix of the system (5) let be negative. Then the system of equations (5) (similarly the (4)) has a unique solution x_N^* and $\max_{0 \leq k \leq 2N-1} |x^*(\overline{t_k}) - x_N^*(\overline{t_k})| \leq C/N$.

When solving numerically, the system of algebraic equations (5) is associated with the Cauchy problem

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_k(v)}{dv} &= (\text{sgnb}(\overline{t_k}))(a(\overline{t_k})\alpha_k + b(\overline{t_k}) \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l g_{kl} + \\ &+ \sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l h_{kl} - f(\overline{t_k})), k = 0, 1, \dots, 2N-1. \\ \alpha_k(0) &= \overline{\alpha}_k, k = 0, \dots, 2N-1, \end{aligned}$$

where $\overline{\alpha}_k, k = 0, \dots, 2N-1$, are constants.

The Cauchy problem is solved by the Euler or Runge-Kutta method.

Hypersingular integral equations with an exact solution of the form $x(t) = (1-t)^{\beta_1} (1+t)^{\beta_2} \varphi(t), -1 < \beta_1, \beta_2 \leq 0$

Let us dwell on the case when the solution of the equation (1) has the form

$$x(t) = (1-t)^{\beta_1} (1+t)^{\beta_2} \varphi(t),$$

where $-1 < \beta_1, \beta_2 < 0, \varphi(t)$ is a smooth function.

As above, for simplicity of notation, we set $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. In this case $v = 1 / (1 + \beta)$. Let us use the notation introduced in Section 1.

The differences lie in the construction of the computational scheme.

Let us write the equation (1) in more detail:

$$(1-t^2)^\beta a(t)\varphi(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \varphi(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\beta h(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (8)$$

From the equation (8) let's move on to the next

$$\begin{aligned} & a(t)\phi(t) + b(t)(1-t^2)^{|\beta|} \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \phi(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \\ & + (1-t^2)^{|\beta|} \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\beta h(t, \tau) \phi(\tau) d\tau = (1-t^2)^{|\beta|} f(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Since the solution of the equation (1) is sought for $-1 < t < 1$, the equations (8) and (9) are equivalent.

An approximate solution of the equation (9) is sought in the form of a spline

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} \gamma_k \Psi_k(t),$$

the basis functions of which are introduced in Section 1.

The coefficients $\alpha_k, k = 0, 1, \dots, 2N-1$, are determined from the system of equations

$$\begin{aligned} & a(\bar{t}_k) \gamma_k + b(\bar{t}_k)(1-\bar{t}_k^2)^{|\beta|} \sum_{l=0}^{2N-1} \gamma_l \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^\beta \Psi_l(\tau)}{\tau - \bar{t}_k} d\tau + \\ & + (1-\bar{t}_k^2)^{|\beta|} \sum_{l=0}^{2N-1} \gamma_l \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^\beta h(\bar{t}_k, \tau) \Psi_l(\tau) d\tau = (1-\bar{t}_k^2)^{|\beta|} f(\bar{t}_k). \end{aligned} \quad (10)$$

We write the system of equations (10) in operator form

$$K_N \Gamma_N = F_N, \quad (11)$$

where the notations

$$\begin{aligned} \Gamma_N &= (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2N-1}), \\ F_N &= \left((1-\bar{t}_0^2)^{|\beta|} f_0, (1-\bar{t}_1^2)^{|\beta|} f_1, \dots, (1-\bar{t}_{2N-1}^2)^{|\beta|} f_{2N-1} \right) \end{aligned}$$

are used.

If the logarithmic norm of the matrix K_N is negative (in any norm), then the system of equations (10) is uniquely solvable.

The convergence of the solution $\Phi_N^* = (\varphi_N^*(\bar{t}_0), \varphi_N^*(\bar{t}_1), \dots, \varphi_N^*(\bar{t}_{2N-1}))$ to $\Phi^* = (\varphi^*(\bar{t}_0), \varphi^*(\bar{t}_1), \dots, \varphi^*(\bar{t}_{2N-1}))$, is proved.

References

1. Davydov A. G., Zakharov E. V., Pimenov Y. V., Hypersingular integral equations for the diffraction of electromagnetic waves on homogeneous magneto-dielectric bodies // Computational Mathematics and Modeling. 2006. Vol. 17, № 2. P. 97–104.
2. Gayen R., Mondal A. A hypersingular integral equation approach to the porous plate problem // Applied Ocean Research. 2014. Vol. 46. P. 70–78.
3. Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko G. M. Hypersingular Integral Equations and their Applications, Boca Raton, Chapman Hall/CRC, CRC Press Company, London, New York, Washington, D.C., 2004.
4. Rus G., Gallego R., Hypersingular shape sensitivity boundary integral equation for crack identification under harmonic elastodynamic excitation // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2007. Vol. 196. P. 2596–2618.
5. Zheng C., Matsumoto T., Takahashi T., Chen H., Explicit evaluation of hypersingular boundary integral equations for acoustic sensitivity analysis based on direct differentiation method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2011. Vol. 35, № 11. P. 1225–1235.
6. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. An approximate solution of hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics 60. v. 6. 2010. P. 607–628.
7. Boykov I. V., Ventsel E. S., Roudnev V. A., Boykova A. I. An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics. 2014. Vol. 86. P. 1–21.
8. Boykov I. V., Roudnev V. A., Boykova A. I., Baulina O. A. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics. 2018. Vol. 127. P. 280–305.
9. Boykov I. V., Roudnev V. A., Boykova A. I. Methods for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations // Axioms. 2020. Vol. 9 (3). P. 74. URL: <https://doi.org/10.3390/axioms9030074>-01Jul2020
10. Boykov I. V. Approximate Methods for Solving Hypersingular integral Equations. In the book "Topics in Integral and Integro-Difference Equations // Theory and Applications. Editors Harenfra Singh, Hemen Dutta, Marcelo M. Cavalcanti, 2021. P. 63–102.
11. Boykov I. V., Boykova A. I., Faydaoglu S. Approximate methods for solving hypersingular integral equations of second kind with singular solutions // Analytical and Numerical Methods of Modelling of Natural Science and Social Problems (ANM-2021) Proceedings of the Sixteenth International Conference ANM-2021 Penza, Russian Federation, 1-4 December, 2021. Edited by Ilya V. Boykov. Penza, Russian Federation, 2021. P. 3–13.
12. Lozinskii S. M. Note on a paper by V.S. Godlevskii // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1973. Vol. 13, № 2. P. 232–234.

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 517.44; 517.995.4

О скрытых взаимосвязях между резольвентной полугруппой и интегральными преобразованиями

Иван Александрович Марусев¹, Александр Эдуардович Рассадин²

^{1,2}Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород, Россия
¹maruseev52@yandex.ru, ²brat_ras@list.ru

Аннотация. Введен новый класс полугрупп – резольвентные полугруппы, инфинитезимальным генератором которых является резольвента некоторого линейного оператора в банаховом пространстве. В свою очередь этот линейный оператор, рассматриваемый в качестве генератора, также может порождать некоторую полугруппу. В работе найдено соотношение между этими двумя полугруппами. Применение этого соотношения к собственным функциям оператора дифференцирования позволяет точно вычислить интегралы, которые одновременно можно интерпретировать и как преобразование Лапласа, и как преобразование Ханкеля, и как синус- или косинус-преобразование Фурье – каждый раз для различных функций. Этим фактом устанавливается скрытая связь между довольно далеко отстоящими друг от друга разделами математики – теорией интегральных преобразований и теорией полугрупп.

Ключевые слова: абстрактная задача Коши, обобщенная теорема Хилле – Иосиды, тождество Гильберта, норма Чебышева, интегродифференциальное уравнение, полугруппа трансляций на прямой

On the hidden relationships between a resolvent semigroup and integral transformations

Ivan A. Maruseev¹, Aleksandr E. Rassadin²

^{1,2}National Research University «Higher School of Economics»,
Nizhny Novgorod, Russia
¹maruseev52@yandex.ru, ²brat_ras@list.ru

Abstract. The article introduces a new class of semigroups – resolvent semigroups, the infinitesimal generator of which is the resolvent of some linear operator in a Banach space. In turn, this linear operator, considered as a generator, can also generate some semigroup. The relation between these two semigroups is found in the paper. Applying this relation to the eigenfunctions of the differentiation operator makes it possible to exactly calculate integrals that can simultaneously be interpreted both as the Laplace transform, and as the Hankel transform, and as the sine- or cosine-

Fourier transform – each time for different functions. This fact establishes a hidden connection between the branches of mathematics that are quite far apart from each other – the theory of integral transformations and the theory of semigroups.

Keywords: the abstract Cauchy problem, the generalized Hille-Iosida theorem, the Hilbert identity, the Chebyshev norm, integro-differential equation, semigroup of translations on a straight line

Пусть V – вещественное или комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, и пусть $A:V \rightarrow V$ – линейный оператор с всюду плотной в V областью определения $D(A)$, тогда часто решение абстрактной задачи Коши:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), u(0) = u_0 \in V, t \geq 0 \quad (1)$$

для дифференциального уравнения (1) в этом банаховом пространстве имеет вид:

$$u(t) = Q_t(A)u_0, \quad (2)$$

где $Q_t(A):V \rightarrow V$ – ограниченный линейный оператор, обладающий для всех $t \geq 0$ и $s \geq 0$ так называемым полугрупповым свойством: $Q_t(A) \cdot Q_s(A) = Q_{t+s}(A)$ и $Q_0(A) = I$ (I – тождественный оператор) [1–3].

Оператор A называется генератором полугруппы. С генератором A полугруппы тесно связан другой линейный оператор — его резольвента:

$$R_\alpha(A) = (A - \alpha \cdot I)^{-1}. \quad (3)$$

Подчеркнем, что оператор (3) определен не при всех $\alpha \in C$, а только при α , принадлежащих так называемому резольвентному множеству $\rho(A) \subset C$.

Резольвенту (3) также можно интерпретировать как генератор полугруппы $Q_t(R_\alpha(A))$, задающей решение следующей абстрактной задачи Коши:

$$\frac{du(t)}{dt} = R_\alpha(A)u(t), u(0) = u_0 \in V, t \geq 0. \quad (4)$$

Мы будем называть эту полугруппу резольвентной полугруппой.

Если линейный оператор $A:V \rightarrow V$ генерирует в банаховом пространстве V C_0 -полугруппу $Q_t(A)$, то есть $\lim_{t \rightarrow 0+} \|Q_t(A)f - f\| = 0$ для любого вектора $f \in V$, тогда согласно обобщенной теореме Хилле-Иосиды [2, 3] для нормы резольвенты (3) оператора A справедливо следующее неравенство:

$$\|R_\alpha(A)\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|R_\alpha(A)f\|}{\|f\|} \leq \frac{M(A)}{\alpha - \omega(A)}, \quad \alpha > \omega(A), \quad (5)$$

где $M(A) = \sup_{t \in [0,1]} \|Q_t(A)\|$ и $\omega(A) = \ln \|Q_1(A)\|$.

Таким образом, в рассматриваемом случае вследствие оценки (5) оператор $R_\alpha(A)$ является ограниченным, поэтому для построения решения абстрактной задачи Коши (4) можно воспользоваться известным разложением операторной экспоненты:

$$Q_t(R_\alpha(A)) = \exp[t \cdot R_\alpha(A)] = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot R_\alpha^n(A). \quad (6)$$

Для вычисления степеней резольвенты, входящих в ряд (6), применим следствие тождества Гильберта [1-3]:

$$R_\alpha^n(A) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} R_\alpha(A). \quad (7)$$

Далее, как известно, при $\alpha > \omega(A)$ справедливо следующее представление резольвенты оператора через соответствующую ему C_0 -полугруппу [1-3]:

$$R_\alpha(A) = - \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha\tau) \cdot Q_\tau(A) \cdot d\tau. \quad (8)$$

Дифференцируя в соответствии с выражением (7) равенство (8) по α почленно, получим:

$$R_\alpha^n(A) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot \int_0^{+\infty} \tau^{n-1} \cdot \exp(-\alpha\tau) \cdot Q_\tau(A) \cdot d\tau. \quad (9)$$

Наконец, подставив формулу (9) в разложение (6), несложно найти явную связь между полугруппой $Q_t(A)$ и ее резольвентной полугруппой $Q_t(R_\alpha(A))$:

$$Q_t(R_\alpha(A)) = I - \sqrt{t} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{J_1(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\tau}} \cdot \exp(-\alpha\tau) \cdot Q_\tau(A) \cdot d\tau. \quad (10)$$

Применим формулу (10) к C_0 -полугруппе, генератором которой является оператор дифференцирования:

$$(Af)(x) = f'(x), \quad f: R \rightarrow R. \quad (11)$$

Для оператора (11) задача Коши (1) сформулируется следующим образом:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Задачу Коши (12) удобно исследовать, выбрав пространство $UC_b(R)$ всех равномерно непрерывных и ограниченных вещественных функций на прямой $f : R \rightarrow R$, снабженных чебышевской нормой:

$$\|f\| = \sup_{x \in R} |f(x)|, \quad (13)$$

в качестве банахова пространства V .

В этом случае область определения $D(A) = UC_b^1(R) = \{f \mid f, f' \in UC_b(R)\}$ оператора (11) всюду плотна в $UC_b(R)$, а решение задачи Коши (17) дается C_0 -полугруппой трансляций на прямой [2]:

$$u(x,t) = (Q_t(A)u_0)(x) = u_0(x+t). \quad (14)$$

Используя норму (13), легко убедиться в том, что $\|Q_t(A)\| = 1$, то есть $\omega(A) = 0$. Таким образом, для рассматриваемого случая представление резольвенты оператора (11) для любого вектора $f \in UC_b(R)$ имеет вид:

$$(R_\alpha(A)f)(x) = - \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha\tau) \cdot f(x+\tau) \cdot d\tau, \quad (15)$$

причем должно быть $\alpha > 0$.

С помощью формулы (15) задача Коши (4) запишется в виде интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha\xi) \cdot u(x+\xi,t) \cdot d\xi = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Комбинируя формулы (10) и (14), получим общее решение задачи Коши (16) для начального условия $u_0 \in UC_b(R)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (Q_t(R_\alpha(A))u_0)(x) = \\ &= u_0(x) - \sqrt{t} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{J_1(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\tau}} \cdot \exp(-\alpha\tau) \cdot u_0(x+\tau) \cdot d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, выберем в качестве начальных условий к задаче Коши (16) функции $u_0^c(x) = \cos(kx)$ и $u_0^s(x) = \sin(kx)$ ($k \in R$). Обе эти функции являются элементами пространства $UC_b(R)$.

В силу линейности оператора $Q_t(R_\alpha(A))$ в качестве начального условия можно взять функцию $u_0^c(x) + i \cdot u_0^s(x) = e_k(x)$. По формуле Эйлера:

$$e_k(x) = \exp(ikx). \quad (18)$$

Как хорошо известно, функции (18) являются собственными функциями оператора (11): $Ae_k = ik \cdot e_k$, соответствующими его собственным значениям $\lambda = ik$ [2]. Подставляя функции (18) в формулу (15), прямым вычислением найдем, что:

$$(R_\alpha(A)e_k)(x) = \frac{1}{ik - \alpha} \cdot e_k(x). \quad (19)$$

Комбинируя формулы (6) и (19), получим решение задачи Коши (16) с начальным условием (18):

$$u(x, t) = (\exp[t \cdot R_\alpha(A)] \cdot e_k)(x) = \exp\left[\frac{t}{ik - \alpha}\right] \cdot e_k(x). \quad (20)$$

С другой стороны, результат подстановки функций (18) в формулу (17) равен:

$$u(x, t) = \left[1 - \sqrt{t} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{J_1(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\tau}} \cdot \exp(-\alpha\tau) \cdot e_k(\tau) \cdot d\tau \right] \cdot e_k(x). \quad (21)$$

Поскольку выражения (20) и (21) совпадают, то, приравнивая друг с другом их действительные и мнимые части после сокращения на функции $e_k(x)$, получим, что:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{J_1(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\tau}} \cdot \exp(-\alpha\tau) \cdot \cos(k\tau) \cdot d\tau = \\ & = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha \cdot t}{\alpha^2 + k^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot t}{\alpha^2 + k^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{J_1(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\tau}} \cdot \exp(-\alpha\tau) \cdot \sin(k\tau) \cdot d\tau = \\ & = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot t}{\alpha^2 + k^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot t}{\alpha^2 + k^2}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Из формул (22) и (23) легко увидеть, что правые части этих тождеств являются преобразованиями Лапласа [4] от функций

$$f_c(\tau) = \frac{J_1(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\tau}} \cdot \cos(k\tau) \text{ и } f_s(\tau) = \frac{J_1(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\tau}} \cdot \sin(k\tau).$$

С другой стороны, эти же формулы могут быть проинтерпретированы как синус-преобразование Фурье и косинус-преобразование Фурье [4] от одной и той же функции $F(\tau) = \frac{J_1(2\sqrt{t\tau})}{\sqrt{\tau}} \cdot \exp(-\alpha\tau)$.

Наконец, тождество (22) заменой переменных $x = \sqrt{\tau}$ и $y = 2\sqrt{t}$ приводятся к следующему виду:

$$\int_0^{+\infty} J_1(xy) g_c(x) x dx = \frac{1}{y} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha \cdot y^2}{4\alpha^2 + 4k^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot y^2}{4\alpha^2 + 4k^2}\right) \right], \quad (24)$$

где $g_c(x) = \exp(-\alpha \cdot x^2) \frac{\cos(k \cdot x^2)}{x}$, а тождество (23) той же заменой – к виду:

$$\int_0^{+\infty} J_1(xy) g_s(x) x dx = \frac{1}{y} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot y^2}{4\alpha^2 + 4k^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot y^2}{4\alpha^2 + 4k^2}\right), \quad (25)$$

где $g_s(x) = \exp(-\alpha \cdot x^2) \frac{\sin(k \cdot x^2)}{x}$.

Из формул (24) и (25) видно, что правые части этих тождеств являются преобразованиями Ханкеля 1-го порядка [4] от функций $g_c(x)$ и $g_s(x)$ соответственно.

Эти обстоятельства выражают скрытые связи между полугруппой трансляций на прямой и интегральными преобразованиями на полупрямой.

Перспективы развития данной работы состоят в рассмотрении других полугрупп и поиске подобных явлений для других интегральных преобразований [4] – таких как преобразование Меллина, Конторовича-Лебедева, Мелера-Фока и. т. д.

Список литературы

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М. : Наука, 1967. 464 с.
2. Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. 830 с.
3. Шамин Р. В. Полугруппы операторов. М. : РУДН, 2008. 173 с.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М. : ГИФМЛ, 1961. 524 с.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6

Исследование порядка точности для SPH-метода

Алексей Федорович Карчиганов¹, Руслан Викторович Жалнин²,
Юрий Николаевич Дерюгин³

^{1,2,3}Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, Россия

¹just.to@yandex.ru, ²zhalninrv@ya.ru

Аннотация. Исследуется порядок точности обобщенного SPH-метода. Выбрана модель для численного вычисления градиента функции методами конечных разностей и SPH. Разработаны и реализованы алгоритмы решения для этой модели. Получены численные результаты с использованием нескольких ядер сглаживания. Сделаны выводы о порядке точности SPH-метода, а также зависимости погрешности численных решений от выбранного ядра сглаживания.

Ключевые слова: гидродинамика гладких частиц, численные методы, решетка Больцмана, порядок точности

Study of accuracy order for SPH-method

Aleksey F. Karchiganov¹, Ruslan V. Zhalnin², Yuriy N. Deryugin³

^{1,2,3}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹just.to@yandex.ru, ²zhalninrv@ya.ru

Abstract. The accuracy order of generic SPH-method is studying. A model for numeric computation of function gradient with both finite difference and SPH methods is selected. Algorithms for solving this model are developed and implemented. Numeric result with a using of different smoothing kernels are obtained. A conclusion about accuracy order of SPH-method, as well as about dependency of computation error on the selected smoothing kernel is made.

Keywords: smooth particle hydrodynamics, numerical methods, Boltzmann lattice, accuracy order

Введение

Метод гладких частиц (SPH) – численный бессеточный лагранжеский метод, широко используемый в решениях задач преимущественно гидро- и газодинамики, а также в некоторых других областях, например, астрофизике, баллистике и др.

Суть метода заключается в делении области исследования на множество дискретных частиц U , параметры которых задаются функциями

u . Искомые параметры конкретной частицы a могут быть вычислены с помощью параметров других частиц $\{b\} : b \in U$, расположенных близко в пределах радиуса R_h частицы a . В случае задач гидродинамики, SPH-метод записывается для уравнения Навье-Стокса в каноничном виде:

$$u_a = \sum_{b \in U} u_b \frac{m_b}{\rho_b} W_{a,b} \mid \forall a \in U, \quad (1)$$

где a – рассчитываемая частица, m_b, ρ_b – масса и плотность частицы b , $W_{a,b} = W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h)$ – значение ядра сглаживания для расстояния $\vec{r}$ между точками a и b при заданной длине сглаживания h . Ядро сглаживания W должно удовлетворять условию нормализации:

$$\int W(\vec{r}, h) dV = 1. \quad (2)$$

Далее, в качестве функции u в уравнение (1) можно подставлять искомые параметры частиц.

Обобщенный SPH-метод для безразмерных величин u частиц набора U формулируется следующим образом:

$$u_a = \sum_{b \in U} u_b V_b W_{a,b} \mid \forall a \in U, \quad (3)$$

где V_b – объем частицы b .

В работах, посвященным SPH-методу [1; 2; 3], показана эффективность и точность решения им физических задач, однако не исследуется порядок точности метода. Целью работы было исследование точности решения SPH-метода, сравнение его с одним из сеточных.

Постановка задачи

Рассмотрим область $D : D \subset \mathbb{R}^2$, с заданной на ней функцией $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемой во всех точках D . Необходимо численно найти решение $\nabla u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

В случае обобщенного SPH-метода частицы могут располагаться в пространстве произвольным образом. Однако для сопоставления численных результатов сеточного и SPH методов, необходимо выбрать такую модель, в которой частицы могли быть упорядочены. Была выбрана модель, используемая в методах решеточных уравнений Больцмана.

Область D делится на N_x частей по оси x с шагом h_x , и на N_y частей по оси y с шагом h_y . На каждом узле (x_j, y_i) решетки, включая граничные (когда $i \in \{0, N_y\}$ или $j \in \{0, N_x\}$), будет задано значение $u_{i,j} = u(x_j, y_i)$. Кроме того, для решения задачи SPH-методом, необхо-

димо достроить решетку, учитывая радиус сглаживания частиц R_h . Для всех достроенных узлов также необходимо задать значения $u_{i,j}$. Значения ∇u будем находить для всех точек, находящихся в серединах ячеек решетки, т.е. во всех точках $\left\{ \left(x_{j-1/2}, y_{i-1/2} \right) \right\}_{i=1 \dots N_y, j=1 \dots N_x}$.

Численные методы

Для решения задачи сеточным методом, воспользуемся формулой:

$$(\nabla u)_a = \frac{\oint_{\partial A} u \vec{n} dl}{S_a}, \quad (4)$$

где A – a -ая область-ячейка с точкой $\left(x_{j-\frac{1}{2}}, y_{i-\frac{1}{2}} \right)$ в центре. Зная, что область является квадратом с вершинами в точках $(x_j, y_i), (x_{j+1}, y_i), (x_{j+1}, y_{i+1}), (x_j, y_{i+1})$, выразим интеграл по границе области A :

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} u \vec{n} dl &= \left(\frac{(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})}{2} - \frac{(u_{i,j} + u_{i+1,j})}{2} \right) \overrightarrow{(1,0)} (y_{i+1} - y_i) + \\ &+ \left(\frac{(u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1})}{2} - \frac{(u_{i,j} + u_{i,j+1})}{2} \right) \overrightarrow{(0,1)} (x_{j+1} - x_j) = \\ &= \frac{\left((u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j} - u_{i+1,j}) h_y, (u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j} - u_{i,j+1}) h_x \right)}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Зная, что $S_a = h_x h_y$, получим:

$$\overrightarrow{(\nabla u)}_a = \frac{\left(\frac{u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j} - u_{i+1,j}}{h_x}, \frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j} - u_{i,j+1}}{h_y} \right)}{2}. \quad (6)$$

Исходя из обобщенной формулы SPH метода (3), выразим $(\nabla u)_a$:

$$\overrightarrow{(\nabla u)}_a = \sum_b u_b V_b \overrightarrow{\nabla W_{a,b}}, \quad (7)$$

где $V_b = h_x h_y$, а так как $W_{a,b} = W(\vec{r}_a - \vec{r}_b, h) = W^{(h)}(q)_{q=\frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{h}}$, получим:

$$\overrightarrow{\nabla W_{a,b}} = \frac{\partial W}{\partial q} \frac{\overrightarrow{r_a - r_b}}{r_a - r_b h}. \quad (8)$$

Примеры расчетов

Расчеты были выполнены при различных значениях прямоугольной области D , исходной функции u и при различных радиусах сглаживания частицы R_h . При вычислении SPH-методом в качестве ядра сглаживания W были взяты несколько функций.

В частности, в качестве W был взят кубический В-сплайн, широко используемый автором работы [1] в качестве основного начального и достаточно точного варианта.

$$W(\overrightarrow{r_a - r_b}, h) = W^{(h)}(q)_{q=\frac{\overrightarrow{r_a - r_b}}{h}} = R_n \begin{cases} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2}q^3, & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2-q)^2, & 1 \leq q \leq 2 \\ 0, & 2 < q \end{cases}, \quad (9)$$

где длина сглаживания $h = \frac{R_h}{2}$. R_n зависит от размерности пространства

$n: \left\{ \frac{1}{h}, \frac{15}{7\pi h^2}, \frac{3}{2\pi h^3} \right\}$ для $n = \{1, 2, 3\}$ соответственно. Однако, для решения поставленной задачи необходимо знать не само $W_{a,b}$, а $\overrightarrow{\nabla W_{a,b}}$. Поэтому, для формулы (8):

$$\frac{\partial W}{\partial q}(q) = R_n \begin{cases} -2q + \frac{3}{2}q^2, & 0 \leq q \leq 1 \\ -\frac{1}{2}(2-q)^2, & 1 \leq q \leq 2 \\ 0, & 2 < q \end{cases}. \quad (10)$$

Также, в качестве W было взято ядро, основанное на двух синусах [4]:

$$\begin{aligned} W(\overrightarrow{r_a - r_b}, h) &= W^{(h)}(s)_{s=\frac{\overrightarrow{r_a - r_b}}{h}} = \\ &= \alpha_d \begin{cases} 4\cos\left(\frac{\pi}{k}s\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{k}s\right) + 3, & 0 \leq s \leq k \\ 0, & k > s \end{cases}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $h = \frac{R_h}{k}$, k – произвольный параметр (был выбран 2), α_d зависит

от размерности пространства: $\alpha_1 = \frac{1}{6kh}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{(3\pi^2 - 16)(kh)^2}$,

$\alpha_3 = \frac{\pi}{(4\pi^2 - 30)(kh)^3}$. Тогда:

$$\frac{\partial W}{\partial s}(s) = \alpha_d \begin{cases} -\frac{2\pi}{k}, \left(\sin\left(\frac{2\pi}{k}s\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{k}s\right) \right), & 0 \leq s \leq k \\ 0, & k > s \end{cases}. \quad (12)$$

В нижеприведенной таблице 1 приведены результаты расчетов для $D = [6; 10] \times [6; 10]$, начальной функции $u : (x, y) \mapsto \ln(x) \ln(y)$, радиусе сглаживания частиц $R_h = 1$ при различных $n \times n$ – разбиений области на

$N_x \times N_y$ частей. Учитывая, что $\nabla u : (x, y) \mapsto \left(\frac{\ln(y)}{x}, \frac{\ln(x)}{y} \right)$, были посчи-

таны максимальные отклонения ϵ , а для каждого более мелкого разбиения – порядок точности k .

Таблица 1

$n \times n$	МКР		SPH (кубический В-сплайн)		SPH (два косинуса)	
	ϵ	k	ϵ	k	ϵ	k
50×50	0.0000075		0.0012455		0.0011742	
100×100	0.0000019	1.976511	0.0003140	1.987960	0.0002959	1.988224
200×200	0.0000005	1.988256	0.0000792	1.987337	0.0000744	1.991131
400×400	0.0000001	1.994127	0.0000201	1.976089	0.0000187	1.991790

Алгоритм был реализован на языке программирования C++20.

Выводы

Точность сеточного Метода Конечных Разностей для случая с упорядоченными частицами больше, чем у SPH-метода. SPH-метод все еще достаточно точный.

Погрешность вычислений ϵ зависит от ядра сглаживания W . В частности, ϵ в случае двух косинусов всегда меньше, чем в случае с кубическим В-сплайном, как и предлагалось в работе [4].

Порядок точности не зависит от ядра сглаживания и всегда стремится к 2, чему дано обоснование в [5].

Список литературы

1. Monaghan J. J. An introduction to SPH // Computer Physics Communications. 1988. Vol. 48, № 1. P. 89–96.
2. Luhui Han, Xiangyu Hu. SPH modeling of fluid-structure interaction // Journal of Hydrodynamics. 2018. Vol. 30, № 1. P. 62–69.
3. Palyanov A., Khayrulin S., Larson S. D. Application of smoothed particle hydrodynamics to modeling mechanisms of biological tissue // Advances in Engineering Software. 2016. Vol. 98. P. 1–11.
4. Yang X., Peng S., Liu M. A new kernel function for SPH with applications to free surface flows // Applied Mathematical Modelling. 2014. Vol. 38. P. 3822–3833.
5. Monaghan J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. 2005. Vol. 68. P. 1703.

Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений на отрезках

Валерия Владимировна Игумнова¹, Наталья Юрьевна Кудряшова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
¹valeriya2001igumnova@gmail.com, ²math.kudryashova@yandex.ru

Аннотация. Исследованы приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений и систем сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши на отрезках.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, вычислительная схема, сингулярный интеграл с ядром типа Коши, квадратурная формула, система сингулярных интегральных уравнений, метод коллокации

Approximate methods for solving singular integral equations on segments

Valeriya V. Igumnova¹, Natal'ya Yu. Kudryashova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
¹valeriya2001igumnova@gmail.com, ²math.kudryashova@yandex.ru

Abstract. Approximate methods for solving singular integral equations and systems of singular integral equations with a Cauchy-type kernel on segments were investigated.

Keywords: singular integral equation, computational scheme, singular integral with Cauchy type kernel, quadrature formula, system of singular integral equations, collocation method

1. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{-1}^1 H(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t), -1 < t < 1, \quad (1)$$

где $f(t), a(t), b(t) \in H_\alpha$.

Рассмотрим две вычислительные схемы решения этого уравнения.

I. Введем на сегменте $[-1; 1]$ две системы узлов $t_k = -1 + \frac{2k}{N}$,

$k = 0, 1, \dots, N$ и $t_k^* = t_k + h, k = 0, 1, \dots, N-1$, где $h (0 < h < 1/N)$ – положительная константа, определяемая ниже.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде кусочно-постоянной функции $x_N(t)$, определяемой формулой

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \psi_k(t), \text{ где } \psi_k(t) = \begin{cases} 1, t \in [t_k, t_{k+1}); \\ 0, t \in [t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Коэффициенты $a_k, k = 0, 1, \dots, N-1$, можно найти из системы линейных алгебраических уравнений, которая в операторной форме при $t \in (t_j, t_{j+1})$ имеет вид

$$K_{N \times N} \equiv \prod_N^t \left[a(t)x_N(t) + \frac{2b(t)}{\pi N} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=0, k \neq j-1}^{N-1} x_N(t_k^*) \frac{1}{t_k - t} + \int_{-1}^1 \prod_N^\tau [H(t, \tau)] x_N(\tau) d\tau \right] = \prod_N^t [f(t)]$$

где $\prod_N^t$ – оператор проектирования на множество кусочно-постоянных функций по переменной t .

Проектирование можно провести по формуле

$$\prod_N^t f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k^*) \psi_k(t).$$

В дальнейших рассмотрениях ограничимся характеристическим уравнением

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad (2)$$

вычислительная схема приближенного решения которого имеет вид

$$a(t_j^*)x_N(t_j^*) + \frac{2b(t_j^*)}{\pi N} \sum_{k=0, k \neq j-1}^{N-1} x_N(t_k^*) \frac{1}{t_k - t_j^*} = f(t_j^*), j = 0, \dots, N-1. \quad (3)$$

Общность рассуждений при этом не теряется, так как добавление вполне непрерывного интегрального оператора не привносит ничего нового.

Теорема 1. Пусть уравнение (2) имеет единственное решение $x^*(t) \in H_\beta$, и пусть $a(t), b(t), f(t) \in H_\beta, 0 < \beta \leq 1$. Тогда существуют такие h и N , что система уравнений (3) имеет единственное решение $x_N^*(t)$.

II. Выберем узлы $t_k = -1 + \frac{k}{n}, k = 0, \dots, 2n, t_j^* = t_j + h, j = 1, 2, \dots, n-1,$
 $t_j^* = t_{j+1} - h, j = n, n+1, \dots, 2n-2, 0 < h < \frac{1}{2n}.$ Параметр h определяется

ниже.

Построим квадратурную формулу для интеграла $I_2 x = \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau$ при $t \in (t_j, t_{j+1})$. Затем заменим в уравнении (1) сингулярный интеграл по построенной квадратурной формуле, а интеграл в смысле Римана по формуле прямоугольников и к полученному выражению применим метод коллокации по узлам $t_k^*, k = 1, \dots, 2n-2$. Тогда получим систему уравнений следующего вида

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{b(t_j^*)}{\pi} \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2, k \neq j-1, j+1}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n-2} H(t_j^*, t_k^*) x(t_k^*) = f(t_j^*), j \neq 1, 2, 2n-2, 2n-3;$$

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{b(t_j^*)}{\pi} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=3}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n-2} H(t_j^*, t_k^*) x(t_k^*) = f(t_j^*), j = 1;$$

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{b(t_j^*)}{\pi} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_2}^{t_3} \frac{x(t_2^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=4}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n-2} H(t_j^*, t_k^*) x(t_k^*) = f(t_j^*), j = 2;$$

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{b(t_j^*)}{\pi} \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2}^{2n-4} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_{2n-2}}^{t_{2n-1}} \frac{x(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n-2} H(t_j^*, t_k^*) x(t_k^*) = f(t_j^*), j = 2n-2;$$

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{b(t_j^*)}{\pi} \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2}^{2n-5} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_{2n-3}}^{t_{2n-2}} \frac{x(t_{2n-3}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x(t_{2n-1}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n-2} H(t_j^*, t_k^*) x(t_k^*) = f(t_j^*), j = 2n-3; \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(t) \in H_\alpha$, и пусть функции $a(t), b(t), f(t) \in H_\alpha, 0 < \alpha \leq 1$. Тогда существуют такие значения h , удовлетворяющие неравенству

$$\left| a_j + \frac{b_j}{\pi} \ln \frac{\frac{1}{n} - h}{h} + \frac{h_{jj}}{n} \right| > E \ln N + D,$$

где E, D – это вполне определенные константы, зависящие от функций $b(t)$ и $H(t, \tau)$, при которых система уравнений (4) имеет единственное решение $x_n^*(t)$, и если h такое, что коэффициент

$$k = -\frac{x(t_j^*)n}{2} \ln \frac{h(2/n - h)}{(1/n + h)(1/n - h)}, \text{ по модулю меньше или равен } n^{-\alpha+1}, \text{ то}$$

$$\text{справедлива оценка } \|x^*(t) - x_n^*(t)\| \leq A \frac{\ln^3 n}{n^\alpha}.$$

2. Приближенные методы решения систем сингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений на отрезке вида

$$\sum_{v=1}^m A_{pv}(t) x_v(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{v=1}^m B_{pv}(t) \int_{-1}^1 \frac{x_v(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_p(t), -1 < t < 1, p = 1, \dots, m.$$

где $F_p(t), A_{pv}(t), B_{pv}(t) \in H_\alpha$, функция $B_{pv}(t) \neq 0, p, v = 1, \dots, m$.

Построим вычислительную схему для решения системы уравнений. Для этого введем системы узлов $t_k = -1 + \frac{k}{n}, k = 0, 1, \dots, 2n, t_j^* = t_j + h, j = 1, 2, \dots, n-1, t_j^* = t_{j+1} - h, j = n, n+1, \dots, 2n-2, 0 < h < \frac{1}{2n}$.

Приближенное решение системы уравнений будем искать в виде вектора $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$, определяемого формулой

$$x_n^v(t) = \sum_{k=1}^{2n-2} a_k^v \psi_k(t), v=1, \dots, m, \text{ где } \psi_k(t) = \begin{cases} 0, t=t_j^*, l \neq k; \\ 1, t=t_k^*. \end{cases}$$

Построим квадратурные формулы для интегралов $Ix_n^v = \int_{-1}^1 \frac{x_n^v(\tau)}{\tau - t} d\tau$,

где $v=1, \dots, m$. Заменим в системе уравнений сингулярные интегралы построенными квадратурными формулами при $t \in (t_j, t_{j+1}), v=p$ и $v \neq p$, и к полученному выражению применим метод коллокации с узлами $t_k^*, k=1, \dots, 2n-2$. Тогда получим систему уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^m A_{pv}(t_j^*) x_n^v(t_j^*) + \frac{1}{\pi} \sum_{v=1, v \neq p}^m B_{pv}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x_n^v(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ & + \sum_{k=2, k \neq j-1, j+1}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x_n^v(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}} \frac{x_n^v(t_j^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x_n^v(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \Big) + \\ & + \frac{1}{\pi} B_{pp}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x_n^p(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x_n^p(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ & + \left. \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x_n^p(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) = F_p(t_j^*), j \neq 1, 2, 2n-3, 2n-2; \\ & \sum_{v=1}^m A_{pv}(t_j^*) x_n^v(t_j^*) + \frac{1}{\pi} \sum_{v=1, v \neq p}^m B_{pv}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_3} \frac{x_n^v(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ & + \sum_{k=3}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x_n^v(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x_n^v(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \Big) + \frac{1}{\pi} B_{pp}(t_j^*) \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{x_n^p(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\ & + \sum_{k=3}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x_n^p(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x_n^p(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \Big) = F_p(t_j^*), j=1; \\ & \sum_{v=1}^m A_{pv}(t_j^*) x_n^v(t_j^*) + \frac{1}{\pi} \sum_{v=1, v \neq p}^m B_{pv}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_4} \frac{x_n^v(t_2^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=4}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}^*} \frac{x_v(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x_n^v(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \Bigg) + \frac{1}{\pi} B_{pp}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{x_n^p(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\
& \left. + \int_{t_2}^{t_3} \frac{x_n^p(t_2^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=4}^{2n-3} \int_{t_k}^{t_{k+1}^*} \frac{x_n^p(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x_n^p(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) = F_p(t_j^*), j = 2; \\
& \sum_{v=1}^m A_{pv}(t_j^*) x_n^v(t_j^*) + \frac{1}{\pi} \sum_{v=1, v \neq p}^m B_{pv}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x_n^v(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2}^{2n-5} \int_{t_k}^{t_{k+1}^*} \frac{x_n^v(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\
& \left. + \int_{t_{2n-4}}^1 \frac{x_n^v(t_{2n-3}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) + \frac{1}{\pi} B_{pp}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x_n^p(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2}^{2n-5} \int_{t_k}^{t_{k+1}^*} \frac{x_n^p(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\
& \left. + \int_{t_{2n-3}}^{t_{2n-2}} \frac{x_n^p(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \int_{t_{2n-2}}^1 \frac{x_n^p(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) = F_p(t_j^*), j = 2n - 3; \\
& \sum_{v=1}^m A_{pv}(t_j^*) x_n^v(t_j^*) + \frac{1}{\pi} \sum_{v=1, v \neq p}^m B_{pv}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x_n^v(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2}^{2n-4} \int_{t_k}^{t_{k+1}^*} \frac{x_n^v(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\
& \left. + \int_{t_{2n-3}}^1 \frac{x_n^v(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) + \frac{1}{\pi} B_{pp}(t_j^*) \left(\int_{t_0}^{t_2} \frac{x_n^p(t_1^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \sum_{k=2}^{2n-4} \int_{t_k}^{t_{k+1}^*} \frac{x_n^p(t_k^*)}{\tau - t_j^*} d\tau + \right. \\
& \left. + \int_{t_{2n-2}}^{t_{2n-1}} \frac{x_n^p(t_{2n-2}^*)}{\tau - t_j^*} d\tau \right) = F_p(t_j^*), j = 2n - 2; \quad p = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 35, № 9. С. 1230.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва Наука, 1968. 511 с.

Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с фиксированными узлами

Шалва Соломонович Хубежты¹, Любовь Юрьевна Плиева²

^{1,2}Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия;

¹Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

¹shalva57@rambler.ru, ²plieva-21@mail.ru

Аннотация. Строится квадратурная формула с наперед заданными узлами для приближенного вычисления гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования $[-1,1]$ с весовой функцией $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. В качестве фиксиро-

ванных узлов берутся концы отрезка интегрирования $a_1 = -1$, $a_2 = 1$. Остальные узлы являются корнями многочлена, ортогонального на отрезке $[-1,1]$ по весу $p(t)$. Дается погрешность построенной квадратурной формулы.

Ключевые слова: весовая функция, сингулярный интеграл, ортогональные многочлены, наперед заданные узлы, погрешность

Quadrature formula for a hypersingular integral with fixed nodes

Shalva S. Khubezhty¹, Lyubov' Yu. Plieva²

^{1,2}North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, North Ossetia – Alania, Russia;

¹Southern Mathematical Institute VSC RAS, Vladikavkaz, North Ossetia – Alania, Russia

¹shalva57@rambler.ru, ²plieva-21@mail.ru

Abstract. A quadrature formula with predetermined nodes is constructed for the approximate calculation of hypersingular integrals on the integration interval $[-1,1]$

with the weight function $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. The ends of the integration segment

$a_1 = -1$, $a_2 = 1$ are taken as fixed nodes. The remaining nodes are the roots of an orthogonal polynomial on the interval $[-1,1]$ with respect to the weight $p(t)$. The error of the constructed quadrature formula is given.

Keywords: weight function, singular integral, orthogonal polynomials, predetermined nodes, error

В данной работе строится квадратурная формула для сингулярного интеграла вида:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt, \quad x \in (-1, 1), \quad (1)$$

с наперед заданными узлами, где $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ – весовая функция, а $\varphi(t)$ заданная на отрезке $[-1; 1]$ достаточно гладкая функция.

Квадратурные формулы такого типа для регулярных и сингулярных интегралов уже построены [1, 2]. В общем случае квадратурные формулы с наперед заданными узлами на отрезке интегрирования $[-1; 1]$ будут иметь вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k(x) \varphi(x_k) + \sum_{l=1}^2 B_l(x) \varphi(a_l). \quad (2)$$

Здесь $a_l (l=1, 2)$ фиксированные узлы, в частности $a_1 = -1, a_2 = 1$, а остальные $2n+2$ параметров $x_k, A_k (k=1, 2, \dots, n)$ и $B_l (l=1, 2)$ надо выбрать так, чтобы равенство (2) было точным для многочленов степени $n+1$.

Введем два многочлена, связанные с узлами a_l и x_k

$$\Omega(t) = (t-1)(t+1), \quad \omega(t) = \prod_{k=1}^n (t-x_k). \quad (3)$$

Коэффициенты квадратурной формулы (2) будем искать в виде

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\omega(t) \Omega(t) dt}{(t-x)^2 (t-x_k) \omega'(x_k) \Omega(x_k)},$$

$$B_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\omega(t) \Omega(t) dt}{(t-x)^2 (t-a_l) \omega(a_l) \Omega'(a_l)}, \quad (4)$$

где в качестве многочлена $\omega(t)$ будем брать многочлены ортогональные по весу $p(t)$ на отрезке $[-1; 1]$, а в качестве многочлена $\Omega(t)$, многочлен $\Omega(t) = t^2 - 1$.

Квадратурная формула для интеграла (1) будет иметь вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt \approx B_1(x) \varphi(-1) + B_2(x) \varphi(1) + \sum_{k=1}^n A_k(x) \varphi(x_k), \quad (5)$$

где

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\omega(t)\Omega(t)dt}{(t-x)^2(t-x_k)\omega'(x_k)\Omega(x_k)}, (k=1,2,\dots,n) \quad (6)$$

$$B_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\omega(t)\Omega(t)dt}{(t-x)^2(t-a_l)\omega(a_l)\Omega'(a_l)}, (l=1,2). \quad (7)$$

В качестве многочлена $\omega(t)$ рассмотрим многочлен $\omega(t) = T_n(t)$, который ортогонален на отрезке $[-1;1]$ по данному весу $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, где $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ – многочлен Чебышева первого рода. В качестве узлов x_k будем брать нули многочлена $T_n(t)$, которые имеют вид:

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, k = (1,2,\dots,n). \quad (8)$$

Подставляя эти значения в (6) и (7) с учетом формулы обращения [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{t-x} dt = U_{n-1}(x), x \in (-1;1) \quad (9)$$

и следующего спектрального соотношения [4]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{(t-x)^2} dt = \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2}, x \in (-1;1) \quad (10)$$

получим

$$B_1(x) = \frac{(-1)^n}{2(x+1)} [U_{n-1}(x) + nT_n(x)], \quad (11)$$

$$B_2(x) = \frac{1}{2(x-1)} [nT_n(x) - U_{n-1}(x)], \quad (12)$$

$$A_k(x) = \frac{1}{T_n'(x_k)(x_k^2-1)} \times \\ \times \frac{(nT_n(x) - xU_{n-1}(x))(x-x_k) + 2x(x-x_k) - (x^2-1)xU_{n-1}(x)}{(x-x_k)^2}, \quad (13)$$

где $k = (1,2,\dots,n)$.

Остаточный член формулы (5) будет иметь вид:

$$R_n(\varphi) = \frac{\varphi^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\Omega(t)\omega(t)}{(t-x)^2} dt, \quad -1 < \xi < 1 \quad (14)$$

Список литературы

1. Хубежты Ш. С., Нартиков Н. Б. Квадратурные формулы с наперед заданными узлами с весовой функцией // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. (Пенза, 1–4 декабря, 2020 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. С. 22–25.
2. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю. Квадратурная формула для сингулярного интеграла с наперед заданными узлами // Материалы XVI Международной научно-технической конференции (Пенза, 1–4 декабря 2021). Аллея Науки. Томск : Quantum. С. 78–81.
3. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ : Южный математический институт ВНЦ РАН, 2011. 235 с.
4. Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Сибирский журнал вычислительной математики. 2016. Т. 16, № 4. С. 413–422.

Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах

Элеанора Максимовна Юркалова¹, Наталья Юрьевна Кудряшова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹elya.urkalova34@yandex.ru, ²math.kudryashova@yandex.ru

Аннотация. Исследуются приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений и систем уравнений на замкнутых контурах.

Ключевые слова: интеграл типа Коши, сингулярное интегральное уравнение, метод коллокации, класс функций Гельдера, квадратурные формулы

Approximate methods for solving singular integral equations on closed circuits

Eleanora M. Yurkalova¹, Natal'ya Yu. Kudryashova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹elya.urkalova34@yandex.ru, ²math.kudryashova@yandex.ru

Abstract. Approximate methods for solving singular integral equations and systems of equations on closed circuits are investigated.

Keywords: integral of Cauchy type, singular integral equation, collocation method, class of Helder functions, quadrature formulas

В данной работе рассматриваются приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений и систем уравнений с ядром типа Коши на замкнутых контурах.

Сингулярные интегральные уравнения

Сингулярным интегральным уравнением с ядром типа Коши называется уравнение вида

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{K(t, \tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad (1)$$

где K – сингулярный оператор, $f(t)$ – заданная функция, которая называется свободным членом или правой частью уравнения, а $x(t)$ – искомая функция. Функции $f(t)$, $x(t)$ удовлетворяют условию Гельдера

$$|x(t_2) - x(t_1)| < A|t_2 - t_1|^\lambda,$$

где A – постоянная Гельдера, λ – показатель Гельдера. Причем A, λ – положительные числа.

Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} H(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t).$$

1. Уравнения на замкнутых контурах

Рассмотрим сингулярный интеграл типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t}.$$

Сделаем следующую замену переменных: $\tau = e^{i\sigma}, t = e^{is}$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t} &= \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(e^{i\sigma}) e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - e^{is}} \cdot \frac{e^{\frac{-i(\sigma+s)}{2}}}{e^{\frac{-i(\sigma+s)}{2}}} d\sigma = \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(e^{i\sigma}) e^{\frac{i(\sigma-s)}{2}}}{2 \sin \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(e^{i\sigma}) \cdot \left(\cos \frac{\sigma-s}{2} + i \sin \frac{\sigma-s}{2} \right)}{\sin \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} x e^{i\sigma} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x e^{i\sigma} d\sigma. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Формула (1.1) называется формулой Гильберта, а выражение $\operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2}$ – ядром Гильберта [2].

Теперь рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t} + \int_{\gamma} H(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), t \in \gamma, \quad (1.2)$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат на комплексной плоскости, функции $a(t), b(t), x(t) \in H_{\alpha}$.

Воспользовавшись преобразованием Гильберта, перейдем от уравнения (1.2) к уравнению

$$a(e^{is})x(e^{is}) - \frac{ib(e^{is})}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\sigma}) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma +$$

$$+i \int_0^{2\pi} H(e^{is}, e^{i\sigma}) x(e^{i\sigma}) e^{i\sigma} d\sigma + \frac{b(e^{is})}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(e^{i\sigma}) d\sigma = f(e^{is}), 0 \leq s \leq 2\pi. \quad (1.3)$$

Для удобства вместо (1.3) будем рассматривать уравнение

$$a(s)x(s) - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} H(s, \sigma) x(\sigma) d\sigma = f(s). \quad (1.4)$$

Построим вычислительную схему для решения уравнения (1.4).

Выберем две системы узлов

$$s_k = \frac{\pi k}{n}, s_k^* = \frac{\pi k}{n} + h, 0 < h < \frac{\pi}{2n}, k = 0, \dots, 2n.$$

Решение уравнения будем находить в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \psi_k(s),$$

где

$$\psi_k(s) = \begin{cases} 0, & s = s_l^*, l \neq k; \\ 1, & s = s_k^*. \end{cases}$$

Затем для вычисления сингулярного интеграла построим квадратурную формулу

$$I_1 x = \int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma.$$

При $s \in (s_j, s_{j+1})$ она примет вид

$$I_1 x = \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}^*} \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma + R_n,$$

где $R_n \leq A n^{-\alpha} \ln n$ – оценка погрешности квадратурной формулы, причем A – положительная числовая константа [1].

Применим к уравнению (1.4) метод коллокации, используя предыдущую квадратурную формулу для вычисления сингулярного интеграла и применяя квадратурную формулу прямоугольников к регулярному интегралу. За узлы коллокации примем $s_k^*, k = 0, \dots, 2n-1$. Таким образом, получим систему уравнений

$$a(s_j^*)x(s_j^*) + \frac{b(s_j^*)}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma +$$

$$+ \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} H(s_j^*, s_k^*) x(s_k^*) = f(s_j^*), j = 0, \dots, 2n-1. \quad (1.5)$$

Выбором параметра h можно добиться того чтобы при $j = 0, \dots, 2n-1$ выполнялись следующие условия

$$\left| a_j + \frac{b_j}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2} \right)}{\sin \frac{h}{2}} \right| + \frac{\pi H_{jj}}{n} \right| > H + B \ln n,$$

где B, H – определенные константы, которые зависят от функций $b(s), H(\sigma, s)$. При выполнении этого условия система уравнений (1.5) будет иметь единственное решение.

Теорема. Пусть уравнение (1.4) имеет единственное решение $x^*(s) \in H_\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ и пусть функции $a(s), b(s), f(s) \in H_\alpha$. Тогда существуют такие значения h , что система уравнений (1.5) имеет единственное решение $x_n^*(s)$ и при h таких, что коэффициент

$$k = -\frac{nx(s_j^*)}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{h}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2} \right)} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{h}{2} \right)}$$

по модулю меньше или равен $n^{1-\alpha}$, справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\| \leq A \frac{\ln^3 n}{n^\alpha}.$$

2. Системы уравнений на замкнутых контурах

Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах вида

$$\sum_{v=1}^m A_{pv}(t)x_v(t) + \frac{1}{2\pi} \sum_{v=1}^m B_{pv}(t) \int_{\gamma} \frac{x_v(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_p(t), t \in \gamma, p, v = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

где функции $A_{pv}(t), B_{pv}(t), F_p(t) \in H_\alpha$, причем $B_{pv}(t) \neq 0$.

Также, как и в пункте 1, воспользуемся преобразованием Гильберта и перейдем от системы уравнений (2.1) к системе уравнений

$$\sum_{v=1}^m A_{pv}(s)x_v(s) + \frac{1}{2\pi} \sum_{v=1}^m B_{pv}(s) \int_0^{2\pi} x_v(s) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = F_p(s), \quad (2.2)$$

$p, v = 1, \dots, m, s \in [0, 2\pi)$.

Построим вычислительную схему для решения системы (2.2).

Для этого выберем две системы узлов

$$s_k = \frac{\pi k}{n}, s_k^* = \frac{\pi k}{n} + h, 0 < h < \frac{\pi}{2n}, k = 0, \dots, 2n.$$

Решение будем находить в виде вектора $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$, где

$$x_n^v(s) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k^v \psi_k(s), v = 1, \dots, m,$$

причем $\psi_k(s) = \begin{cases} 0, & s = s_l^*, l \neq k; \\ 1, & s = s_k^*. \end{cases}$

Затем для вычисления сингулярных интегралов построим квадратурные формулы

$$I x_n^v = \int_0^{2\pi} x_n^v(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma, v = 1, \dots, m. \quad (2.3)$$

При $s \in (s_j, s_{j+1})$ и $v = p$ (2.3) примет вид

$$I x_n^v = R_n^1 + \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} x_n^v(s_k^*) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma,$$

если же $v \neq p$, то

$$I x_n^v = R_n^2 + \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} x_n^v(s_k^*) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma.$$

Исходя из вышеизложенного, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^m A_{pv}(s_j^*) x_n^v(s_j^*) + \frac{1}{2\pi} \sum_{v=1, v \neq p}^m \left(B_{pv}(s_j^*) \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} x_n^v(s_k^*) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s_j^*}{2} d\sigma \right) + \\ & + \frac{1}{2\pi} B_{pp}(s_j^*) \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} x_n^p(s_k^*) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s_j^*}{2} d\sigma = F_p(s_j^*), \end{aligned}$$

$$p = 1, \dots, m, j = 0, \dots, 2n - 1,$$

решив которую определим приближенные значения неизвестных функций.

Решение модельных примеров показало эффективность исследуемых приближенных методов.

Список литературы

1. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 9. С. 1230–1237.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.

Приближенное решение системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений Амбарцумяна

Илья Владимирович Бойков¹, Анастасия Александровна Пивкина²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹i.v.boykov@gmail.com, ²nastyashaldaeva@mail.ru

Аннотация. Представлено приближенное решение системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений Амбарцумяна. Данные уравнения и их обобщения являются одними из основных интегральных уравнений астрофизики. Наряду с уравнениями астрофизики этими уравнениями моделируются многочисленные задачи механики, аэродинамики, электродинамики. В связи с отсутствием аналитических решений таких уравнений возникает необходимость построения и обоснования численных методов их решения, а также подтверждения эффективности построенных алгоритмов вычислительными экспериментами. В данной работе построен приближенный метод решения сингулярных интегральных уравнений типа Амбарцумяна, основанный на технологии метода коллокации, и дано его обоснование. Приведены модельные примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, уравнения Амбарцумяна, нелинейные уравнения, итерационные методы

Approximate solution of the system of nonlinear singular integral Ambartsumian's equations

Il'ya V. Boykov¹, Anastasiya A. Pivkina²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹i.v.boykov@gmail.com, ²nastyashaldaeva@mail.ru

Abstract. The article presents an approximate solution of the system of nonlinear singular integral equations of Ambartsumian. These equations and its generalizations are one of the main integral equations of astrophysics. Along with the equations of astrophysics, these equations model numerous problems in mechanics, aerodynamics, and electrodynamics. Since there are no analytical solutions to such equations, it becomes necessary to construct and substantiation numerical methods for solving them, as well as to confirm the effectiveness of the constructed algorithms by computational experiments. In this paper, an approximate method for solving singular integral equations of the Ambartsumyan type based on the technology of the collocation method is constructed, and its justification is given. Model examples illustrating the effectiveness of the proposed method are given.

Keywords: singular integral equations, Ambartsumyan's equations, nonlinear equations, iterative methods

В предыдущих работах авторов построены и обоснованы сплайн-коллокационные методы решений уравнений Амбарцумяна со сплайнами нулевого и первого порядков [1-2].

В работе [2] также рассмотрена система гиперсингулярных интегральных уравнений Амбарцумяна, приведены алгоритмы приближенного решения со сплайнами нулевого и первого порядков и обоснования вычислительных схем.

В данной работе рассмотрим систему уравнений, к которой при исследовании задач рассеяния света в средах с конечной оптической толщиной пришел Амбарцумян,

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + \frac{\lambda}{2} t x_1(t) \int_0^1 \frac{x_1(\tau)}{\tau+t} d\tau - \frac{\lambda}{2} t x_2(t) \int_0^1 \frac{x_2(\tau)}{\tau+t} d\tau, \\ x_2(t) = e^{-\tau/t} + \frac{\lambda}{2} t \int_0^1 \frac{x_2(\tau) x_1(t) - x_1(\tau) x_2(t)}{\tau-t} d\tau, \end{cases} \quad (1)$$

где τ – оптическая глубина.

Систему (1) для дальнейшего более удобно записать в виде

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + \frac{\lambda}{2} t x_1(t) \int_0^1 \frac{x_1(\tau)}{\tau+t} d\tau - \frac{\lambda}{2} t x_2(t) \int_0^1 \frac{x_2(\tau)}{\tau+t} d\tau, \\ x_2(t) = e^{-\tau/t} + \frac{\lambda}{2} t x_1(t) \int_0^1 \frac{x_2(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{\lambda}{2} t x_2(t) \int_0^1 \frac{x_1(\tau)}{\tau-t} d\tau. \end{cases}$$

Рассмотрим более общую систему из двух уравнений, из которых одно является уравнением Фредгольма второго рода, а второе – нелинейным сингулярным интегральным уравнением

$$\begin{cases} x_1(t) + \lambda_{11} a_{11}(t) x_1(t) \int_0^1 \frac{x_1(\tau)}{\tau+t} d\tau + \lambda_{12} a_{12}(t) x_2(t) \int_0^1 \frac{x_2(\tau)}{\tau+t} d\tau = f_1(t), \\ x_2(t) + \lambda_{21} a_{21}(t) x_1(t) \int_0^1 \frac{x_2(\tau)}{\tau-t} d\tau + \lambda_{22} a_{22}(t) x_2(t) \int_0^1 \frac{x_1(\tau)}{\tau-t} d\tau = f_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

Насколько известно авторам, подобные системы не исследовались и неизвестен характер особенностей функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ на концах сегмента $[0,1]$.

Так как функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ связаны с интенсивностью рассеяния и поглощения света, естественно считать, что они ограничены на сегменте $[0,1]$.

Сегмент $[0,1]$ покроем более мелкими интервалами $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = \overline{0, N-2}$, $\Delta_{N-1} = [t_{N-1}, t_N]$, где $t_k = \frac{k}{N}$, $k = \overline{0, N-1}$.

Пусть $\bar{t}_k = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$, $k = \overline{0, N-1}$.

Приближенное решение системы уравнений (2) будем искать в виде кусочно-постоянных функций

$$x_{1,N} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \psi_k(t), \quad x_{2,N} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \psi_k(t),$$

где $\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \notin \Delta_k. \end{cases}$

Для нахождения коэффициентов $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, $k = \overline{0, N-1}$ используем метод коллокаций по узлам $\bar{t}_k$:

$$\begin{cases} \alpha_k + \lambda_{11} a_{11}(\bar{t}_k) \alpha_k \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{\tau + \bar{t}_k} + \lambda_{12} a_{12}(\bar{t}_k) \beta_k \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{\tau + \bar{t}_k} = f_1(\bar{t}_k), \\ \beta_k + \lambda_{21} a_{21}(\bar{t}_k) \alpha_k \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{\tau - \bar{t}_k} + \lambda_{22} a_{22}(\bar{t}_k) \beta_k \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \int_{\Delta_l} \frac{d\tau}{\tau - \bar{t}_k} = f_2(\bar{t}_k), \end{cases} \quad (3)$$

где $k = \overline{0, N-1}$.

Систему уравнений (3) запишем как операторное уравнение

$$KX = F.$$

Интегралы в системе (3) вычислим аналитически и поставим полученной в результате системе в соответствие задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_k(u)}{du} = \gamma_k(u) \left(\alpha_k(u) + \lambda_{11} a_{11}(\bar{t}_k) \alpha_k(u) \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l(u) \ln \left| \frac{t_{l+1} + \bar{t}_k}{t_l + \bar{t}_k} \right| + \right. \\ \quad \left. + \lambda_{12} a_{12}(\bar{t}_k) \beta_k(u) \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l(u) \ln \left| \frac{t_{l+1} + \bar{t}_k}{t_l + \bar{t}_k} \right| - f_1(\bar{t}_k) \right), \\ \frac{d\beta_k(u)}{du} = \delta_k(u) \left(\beta_k(u) + \lambda_{21} a_{21}(\bar{t}_k) \alpha_k(u) \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l(u) \ln \left| \frac{t_{l+1} - \bar{t}_k}{t_l - \bar{t}_k} \right| + \right. \\ \quad \left. + \lambda_{22} a_{22}(\bar{t}_k) \beta_k(u) \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l(u) \ln \left| \frac{t_{l+1} - \bar{t}_k}{t_l - \bar{t}_k} \right| - f_2(\bar{t}_k) \right), \end{cases} \quad (4)$$

где $k = \overline{0, N-1}$

$$\alpha_k(0) = \alpha_k, \beta_k(0) = \beta_k, k = \overline{0, N-1}, \quad (5)$$

где $\gamma_k(u) = \pm 1$, $\delta_k(u) = \pm 1$ и выбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана правой части системы (4) была отрицательной.

Если условие отрицательности не выполняется, необходимо выполнить регуляризацию задачи Коши (4)–(5).

Найдем якобиан правой части системы (4). Пусть $J_1^{(k)}$ и $J_2^{(k)}$ – элементы первого и второго блочного уравнения системы (4), тогда якобиан имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial \alpha_0} & \dots & \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial \alpha_{N-1}} & \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial \beta_0} & \dots & \frac{\partial J_1^{(0)}}{\partial \beta_{N-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial J_1^{(N-1)}}{\partial \alpha_0} & \dots & \frac{\partial J_1^{(N-1)}}{\partial \alpha_{N-1}} & \frac{\partial J_1^{(N-1)}}{\partial \beta_0} & \dots & \frac{\partial J_1^{(N-1)}}{\partial \beta_{N-1}} \\ \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial \alpha_0} & \dots & \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial \alpha_{N-1}} & \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial \beta_0} & \dots & \frac{\partial J_2^{(0)}}{\partial \beta_{N-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial J_2^{(N-1)}}{\partial \alpha_0} & \dots & \frac{\partial J_2^{(N-1)}}{\partial \alpha_{N-1}} & \frac{\partial J_2^{(N-1)}}{\partial \beta_0} & \dots & \frac{\partial J_2^{(N-1)}}{\partial \beta_{N-1}} \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1^{(k)}}{\partial \alpha_k} &= 1 + \lambda_{11} a_{11}(\bar{t}_k) \left(\sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \ln \left| \frac{t_{l+1} + \bar{t}_k}{t_l + \bar{t}_k} \right| + 2\alpha_k \ln \left| \frac{t_{k+1} + \bar{t}_k}{t_k + \bar{t}_k} \right| \right), \\ \frac{\partial J_1^{(k)}}{\partial \beta_k} &= \lambda_{12} a_{12}(\bar{t}_k) \left(\sum_{l=0}^{N-1} \beta_l \ln \left| \frac{t_{l+1} + \bar{t}_k}{t_l + \bar{t}_k} \right| + 2\beta_k \ln \left| \frac{t_{k+1} + \bar{t}_k}{t_k + \bar{t}_k} \right| \right), \\ \frac{\partial J_1^{(k)}}{\partial \alpha_i} &= \lambda_{11} a_{11}(\bar{t}_k) \alpha_k \ln \left| \frac{t_{i+1} + \bar{t}_k}{t_i + \bar{t}_k} \right|, \quad \frac{\partial J_1^{(k)}}{\partial \beta_i} = \lambda_{12} a_{12}(\bar{t}_k) \beta_k \ln \left| \frac{t_{i+1} + \bar{t}_k}{t_i + \bar{t}_k} \right|, \\ \frac{\partial J_2^{(k)}}{\partial \alpha_k} &= \lambda_{21} a_{21}(\bar{t}_k) \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l \ln \left| \frac{t_{l+1} - \bar{t}_k}{t_l - \bar{t}_k} \right| + \lambda_{22} a_{22}(\bar{t}_k) \beta_k \ln \left| \frac{t_{k+1} - \bar{t}_k}{t_k - \bar{t}_k} \right|, \\ \frac{\partial J_2^{(k)}}{\partial \beta_k} &= 1 + \lambda_{21} a_{21}(\bar{t}_k) \alpha_k \ln \left| \frac{t_{k+1} - \bar{t}_k}{t_k - \bar{t}_k} \right| + \lambda_{22} a_{22}(\bar{t}_k) \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l \ln \left| \frac{t_{l+1} - \bar{t}_k}{t_l - \bar{t}_k} \right|, \\ \frac{\partial J_2^{(k)}}{\partial \alpha_i} &= \lambda_{22} a_{22}(\bar{t}_k) \beta_k \ln \left| \frac{t_{i+1} - \bar{t}_k}{t_i - \bar{t}_k} \right|, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J_2^{(k)}}{\partial \beta_i} = \lambda_{21} a_{21}(\bar{t}_k) \alpha_k \ln \left| \frac{t_{i+1} - \bar{t}_k}{t_i - \bar{t}_k} \right|.$$

Вычислив матрицу $J(X(t))$, применим к решению системы уравнений (3) обобщенную схему непрерывного операторного метода:

$$\frac{dX(t)}{dt} = -(J(X(t)))^* (K(X(t)) - F(t)), \quad (6)$$

где векторы $X(t) = (\{\alpha_k\}, \{\beta_k\})$, $k = \overline{0, N-1}$, $F(t) = (f_1(t), f_2(t))$, $(J(X(t)))^*$ – матрица, сопряженная к якобиану $J(X(t))$.

Для решения системы (6) могут применяться любые приближенные методы решения систем дифференциальных уравнений. Для решения модельных примеров в работе использовался метод Эйлера.

Модельный пример 1. Пусть точные решения системы (2) имеют вид: $x_1(t) = t + 1$, $x_2(t) = t^2 - 1$, и функции заданы $a_{11}(t) = t + 1$, $a_{12}(t) = (t + 1)^2$, $a_{21}(t) = t - 1$, $a_{22}(t) = (t - 1)^2$. На рис. 1, 2 представлены зависимости среднеквадратичной погрешности от значений параметров λ_{ij} , $i, j = 1, 2$. Результаты представлены для узлов $N = 100$, количества итераций 1000, шаг метода Эйлера $h = 0,001$.

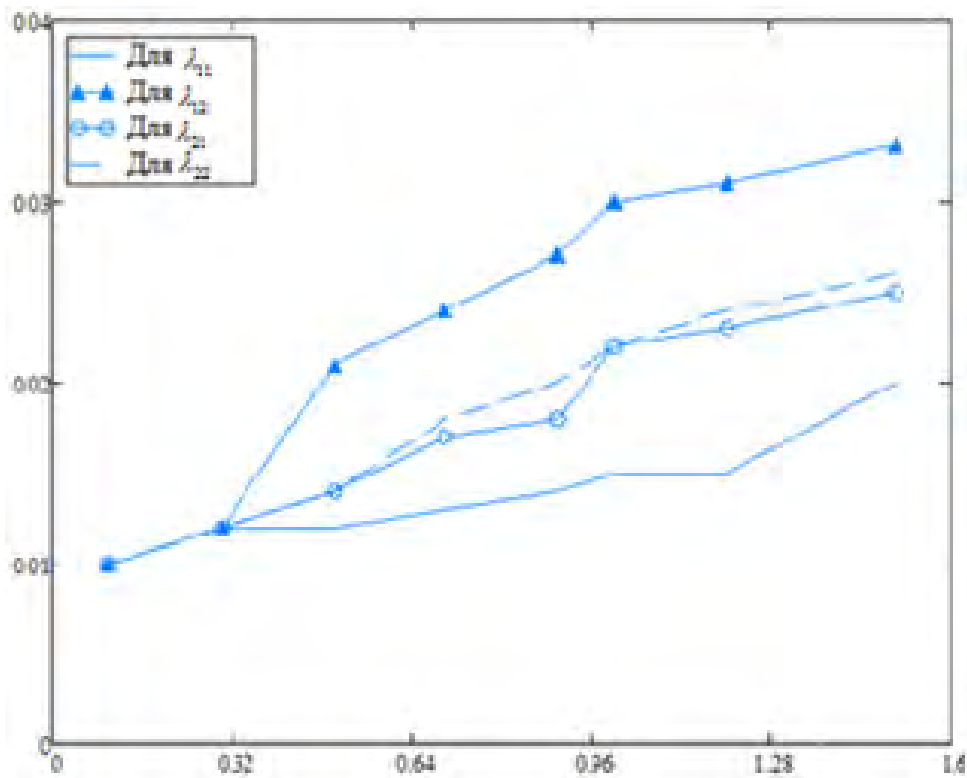


Рис. 1. Зависимость среднеквадратичной погрешности от значений параметров λ_{ij} решения $x_2(t)$ модельного примера 1

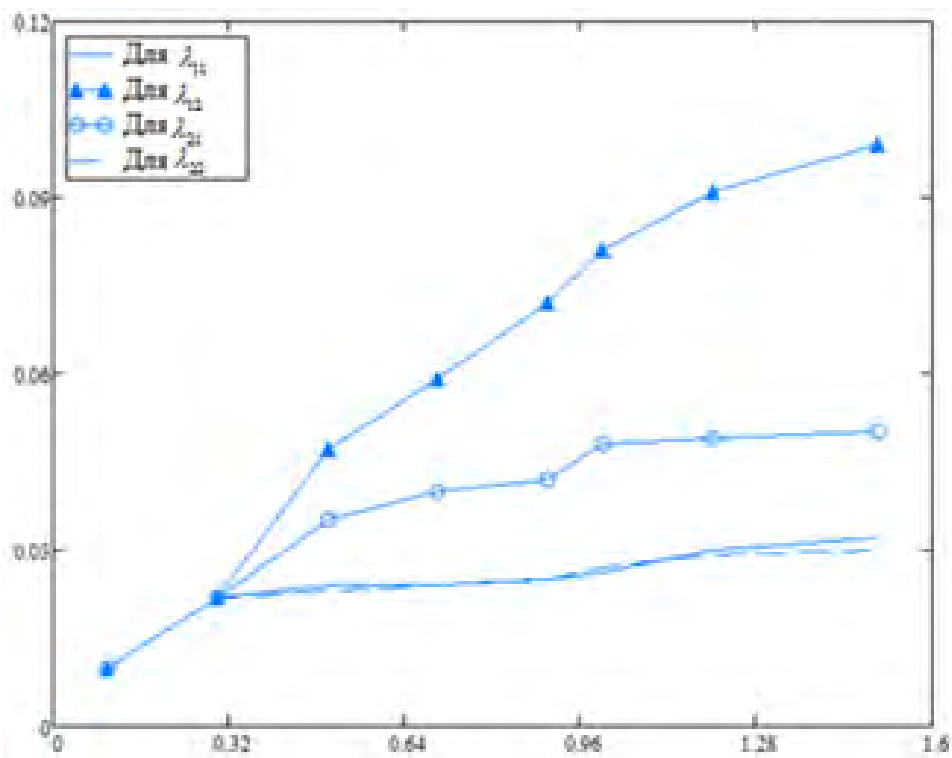


Рис. 2. Зависимость среднеквадратичной погрешности от значений параметров λ_{ij} решения $x_1(t)$ модельного примера 1

Модельный пример 2. Рассмотрим пример, где точные решения системы (2) имеют вид: $x_1(t) = t^2 + t + 1$, $x_2(t) = t^2 - t - 1$, а функции заданы $a_{11}(t) = a_{21}(t) = t + 1$, $a_{12}(t) = a_{22}(t) = t - 1$. На рис. 3, 4 представлены зависимости среднеквадратичной погрешности от значений параметров λ_{ij} , $i, j = 1, 2$. Результаты представлены для узлов $N = 100$, количества итераций 1000, шаг метода Эйлера $h = 0,001$.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что значение среднеквадратичной погрешности для двух модельных примеров находится приблизительно в одинаковых интервалах для точных решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$. При увеличении значений параметров λ_{ij} , $i, j = 1, 2$ возрастает значение среднеквадратичной погрешности, также наблюдается осцилляция на концах отрезка $[0, 1]$. Большее влияние значений параметров λ_{ij} , $i, j = 1, 2$ наблюдается для параметров системы, которые относятся к нелинейному сингулярному интегральному уравнению. Так для модельной задачи 1 большее влияние имеет значение параметра λ_{12} как для функции $x_1(t)$, так и для функции $x_2(t)$, а для модельной задачи 2 – параметр λ_{22} как для функции $x_1(t)$, так и для функции $x_2(t)$. Такие же наблюдения характерны и для других рассмотренных модельных примеров.

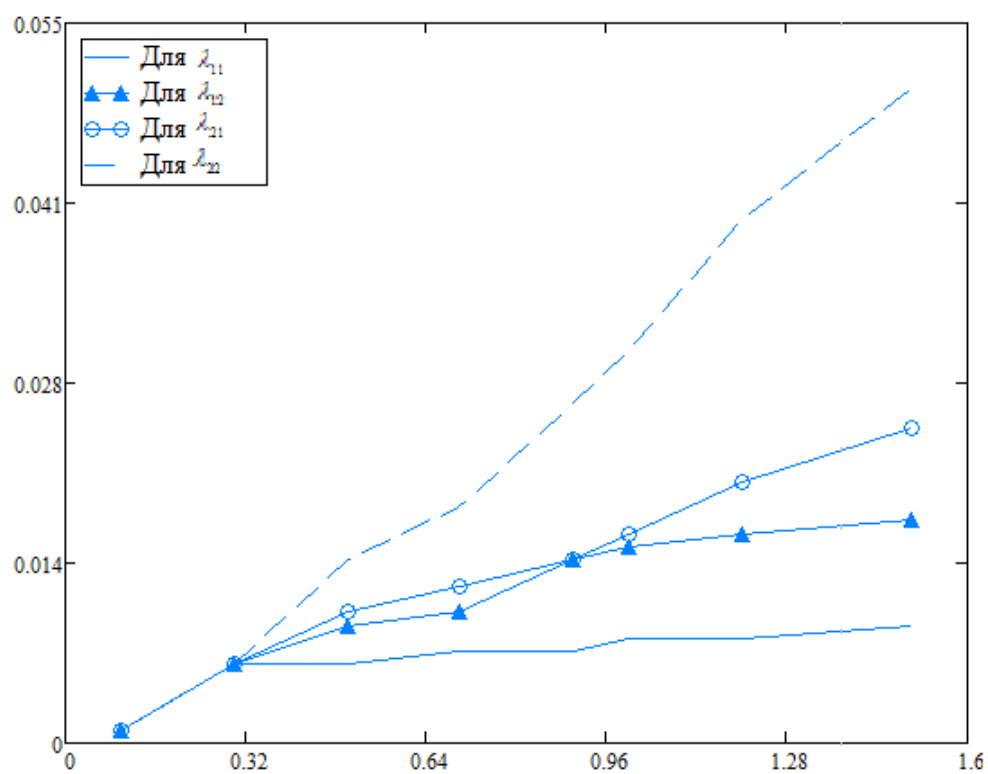


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной погрешности от значений параметров λ_{ij} решения $x_2(t)$ модельного примера 2

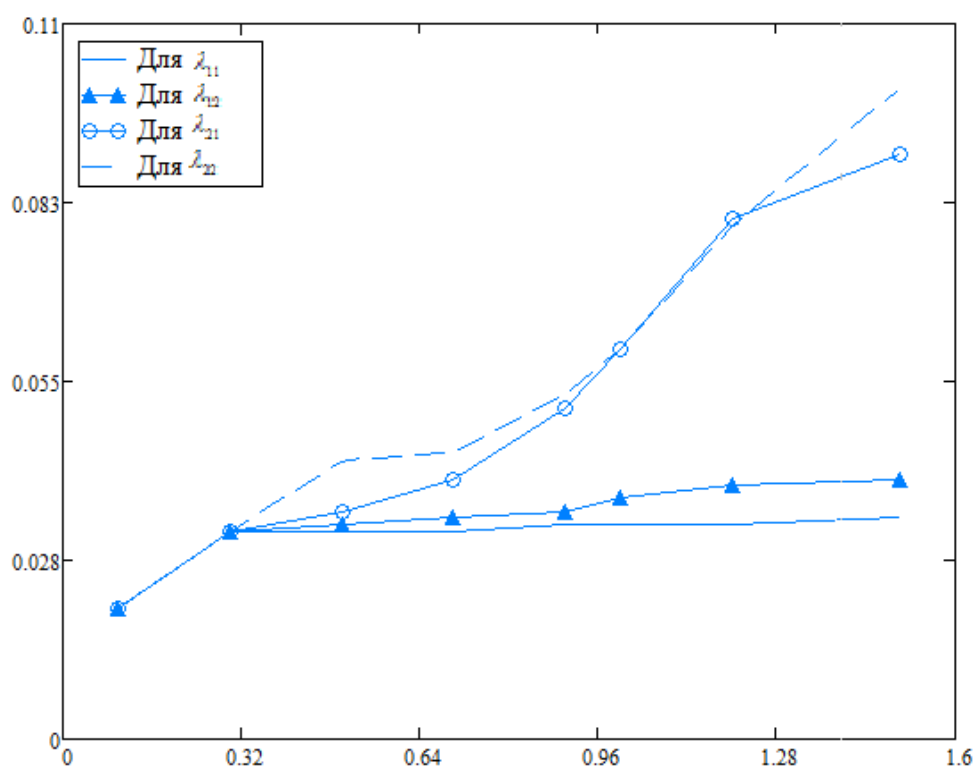


Рис. 4. Зависимость среднеквадратичной погрешности от значений параметров λ_{ij} решения $x_1(t)$ модельного примера 2

Список литературы

1. Бойков И. В., Шалдаева А. А. Итерационные методы решения уравнений Амбарцумяна. Часть 1 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 2. С. 14–34. doi:10.21685/2072-3040-2021-2-2
2. Бойков И. В., Пивкина А. А. Итерационные методы решения уравнений Амбарцумяна. Часть 2 // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 71–87. doi:10.21685/2072-3040-2021-4-6
3. Амбарцумян В. А. О рассеянии света атмосферами планет // Астрономический журнал. 1942. Т. 19, № 50. С. 30–47.
4. Амбарцумян В. А. К вопросу о диффузном отражении света мутной средой // Доклады Академии наук СССР. 1943. Т. 38, № 8. С. 257–279.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

УДК 519.872.3

Обзор многоканальных систем массового обслуживания с приоритетом

Мирзабек Жумабоевич Бутаев¹, Татьяна Вячеславовна Черушева²,
Павел Владимирович Айкашев³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
¹butaevmj@mail.ru, ²tank1100@yandex.ru, ³pavel.aihashev@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются различные подходы к анализу многоканальных систем массового обслуживания с приоритетом. Представлены основные способы анализа многоканальной системы массового обслуживания с двумя классами приоритета, а также возможные подходы к решению задачи анализа в случае, когда классов приоритета может быть больше двух.

Ключевые слова: многоканальная система массового обслуживания, приоритет, FCFS

Overview of multichannel queuing systems with priority

Mirzabek Zh. Butaev¹, Tat'yana V. Cherusheva², Pavel V. Aykashev³

^{1,2,3}Penza State University, Russia, Penza
¹butaevmj@mail.ru, ²tank1100@yandex.ru, ³pavel.aihashev@mail.ru

Abstract. Various approaches to the analysis of multichannel queuing systems with priority are considered. The main methods of analyzing a multichannel CFR with two priority classes are presented, as well as possible approaches to solving the analysis problem in the case when there may be more than two priority classes.

Keywords: multichannel queuing system, priority, FCFS

Введение

Большая часть теории массового обслуживания посвящена анализу систем [1], в которых поступающие заявки обладают заданным приоритетом и обслуживаются в соответствии с приоритетной схемой обработки заявок. Высокоприоритетные заявки вытесняют средне приоритетные заявки, которые в свою очередь, вытесняют из очереди низкоприоритетные заявки [2]. Приоритетная очередь может возникать во многих задачах.

Приоритет заявки определяется отправителем заявки по соглашению об уровне обслуживания, в соответствии с которым отправитель

предпочитают платить больше, чтобы получить приоритетный доступ к какому-то востребованному ресурсу.

Другим вариантом является искусственное создание приоритета, чтобы максимизировать прибыль компании или увеличить загрузку системы. Например, интернет-магазин может отдать приоритет запросам крупным покупателям, чтобы эти клиенты с меньшей вероятностью обратились в другой магазин [3].

Поэтому анализ среднего времени отклика для различного класса заявок является важной проблемой. Хотя эта проблема хорошо изучена в случае одноканальной очереди $M / G / 1$ с 1950-х годов [4], проблема становится намного сложнее, если рассматривать ее в контексте многоканальной системы $M / G / k$ и даже для $M / M / k$ систем, когда задания имеют разную скорость выполнения.

Поскольку такие многоканальные системы распространены во многих приложениях, где используется система приоритета, необходимы методы расчета и повышения эффективности таких систем.

Причина, по которой приоритетную очередь сложно анализировать в многоканальных системах, заключается в том, что задания с разными приоритетами могут обслуживаться (на разных каналах) одновременно, поэтому представление цепи Маркова многоклассовой многоканальной очереди, по-видимому, требует отслеживания количества заданий каждого класса. Следовательно, нужна цепь Маркова, которая бесконечна в m измерениях, где m - количество классов приоритетов. В то время, как анализ одномерной бесконечной цепи Маркова прост, анализ m -мерной бесконечной цепи Маркова ($m > 1$) в значительной степени является неразрешимой задачей.

Хотя существует большое количество работ, которые посвящены анализу очереди в многоканальных системах массового обслуживания (СМО) с приоритетом, однако почти все они ограничены только двумя классами приоритетов, при этом все они предполагают экспоненциальное время обслуживания для каждой поступившей заявки.

Работы, в которых рассматривается вопрос работы многоканальной системы массового обслуживания с более чем двумя приоритетами в основном, являются грубыми приближениями, основанными на предположении, о том, что поведение нескольких каналов связано с поведением системы с одним каналом [5], или приближения, основанные на объединении множества классов приоритетов в два класса [6].

Два приоритетных класса

Опишем основные результаты работ для многоканальных СМО, ограниченных двумя приоритетными классами и экспоненциально распределенными требованиями к обработке заявок. Методы анализа системы двойного приоритета $M / M / k$ можно разделить на четыре типа:

- приближения с помощью агрегирования или усечения;
- методы матричного анализа;
- методы генерирующих функций;
- особые случаи, когда классы приоритетов имеют одинаковое среднее значение. Если не указано иное, следует исходить из приоритетов упреждающего возобновления.

Почти весь анализ систем $M/M/k$ с двойным приоритетом включает использование цепей Маркова, которые с двумя классами приоритетов бесконечно растут в двух измерениях. Чтобы преодолеть это, исследователи различными способами упростили цепочку. Некоторые авторы усекают цепочку, либо ограничивая количество заявок с высоким приоритетом [7], либо количество заявок с низким приоритетом [8]. Другие решали проблему бесконечных цепей Маркова, различными способами упрощая цепочку, агрегируя состояния, что дает часто грубое приближение [9]. К сожалению, агрегирование или усечение, как правило, не могут обеспечить производительность системы по мере увеличения интенсивности поступления заявок.

Хотя теоретически метод матричного анализа может быть использован для непосредственного анализа 2D-бесконечной цепи Маркова [10], метод матричного анализа намного проще и эффективнее с точки зрения вычислений, когда он применяется к 1D-бесконечной цепи Маркова. Поэтому большинство работ, в которых используется метод матричного анализа для анализа систем, включающих 2D-бесконечные цепи Маркова, сначала сводят 2D-бесконечную цепочку к одномерной бесконечной цепочке, например, усекая пространство состояний, устанавливая верхнюю границу количества заданий [7,8]

Одной из немногих работ, посвященных не экспоненциальному времени обработки поступивших заявок, является статья [11], в которой рассматривается двухприоритетная многоканальная система, в которой внутри каждого приоритета может быть несколько различных классов, каждый со своим собственным различным экспоненциальным распределением поступающих заданий. Это эквивалентно предположению о гиперэкспоненциальном распределении размеров заданий для каждого из двух классов приоритетов. Задача решается с помощью комбинации производящих функций и матричного метода анализа. Теоретически этот метод может быть обобщен на распределение Пуассона для поступающих заявок, хотя автором была проведена оценка только гиперэкспоненциального распределения из-за повышенной сложности, необходимой при использовании более общих распределений Пуассона.

Более двух приоритетных классов

Для случая более двух классов приоритетов существуют только грубые приближения. Приближение Бонди-Бузена [5] прекрасно своей

простотой и удобством использования. Это основано на интуитивном наблюдении, что «улучшение» приоритетного планирования по сравнению с планированием FCFS (Первый пришел-первым обработан) для k каналов аналогично таковому для случая одного сервера с равной общей пропускной способностью:

$$\frac{E[D^{M/G/k/prior}]}{E[D^{M/G/k/FCFS}]} \approx \frac{E[D^{M/G/1/prior}]}{E[D^{M/G/1/FCFS}]} = \text{коэффициент масштабирования}.$$

Здесь $E[D^{M/G/k/prior}]$ - общая средняя задержка при приоритетном планировании с k каналами со скоростью $\frac{1}{k}$, а $E[D^{M/G/k/FCFS}]$ определяется аналогично для FCFS, в то время как $M/G/1$ относится к очереди одного канала со скоростью одна заявка за одну единицу времени.

Это соотношение является точным, когда количество заявок распределено экспоненциально и обрабатывается с одинаковой скоростью для всех классов заявок; однако, что происходит, когда это не так, никогда не было установлено.

Другое приближение (названное авторами МК-N), которое допускает более двух классов приоритетов и экспоненциальные размеры заданий, рассмотрены в работе [6], в которой проводится расширение анализа с двух классов приоритетов до $m > 2$ классов приоритетов. Приближение МК-N анализирует среднюю задержку класса с наименьшим приоритетом в очереди $M/M/k$ с $m \geq 2$ классами приоритетов путем агрегирования всех классов с более высоким приоритетом. Таким образом, вместо объединения всех заявок в один класс, как это делает приближение Бонди-Бузена, метод МК-N объединяет их в два класса. Распределение заявок по размеру агрегированного класса затем аппроксимируется экспоненциальным распределением путем сопоставления первого момента распределения.

Список литературы

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М. : Изд-во ЛКИ, 2007. 400 с.
2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями : пер. с англ. М. : Мир, 1979. 600 с.
3. Нестеров Ю. Г. Анализ характеристик замкнутой системы массового обслуживания с относительными приоритетами // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2014. № 3. С. 242–254.
4. Cobham A. Priority assignment in waiting line problems // Operations Research. 1954. Vol. 2, № 1. P. 70–76.

5. Bondi A., Buzen J. The response times of priority classes under preemptive resume in M/G/m queues // ACM Sigmetrics. 1984. P. 195–201.
6. Mitran I., King P. Multiprocessor systems with preemptive priorities // Performance Evaluation. 1981. Vol. 1. P. 118–125.
7. Kao E. P. C., Narayanan K. S. Computing steady-state probabilities of a nonpreemptive priority multiserver queue // Journal on Computing. 1990. Vol. 2 (3). P. 211–218.
8. Kao E., Narayanan K. Modeling a multiprocessor system with preemptive priorities // Management Science. 1991. Vol. 2. P. 185–97.
9. Nishida T. Approximate analysis for heterogeneous multiprocessor systems with priority jobs // Performance Evaluation. 1992. Vol. 15. P. 77–88.
10. Bright L., Taylor P. Calculating the equilibrium distribution in level dependent quasi-birth-and-death processes // Stochastic Models. 1995. Vol. 11. P. 497–514.
11. Sleptchenko A. Multi-class, multi-server queues with non-preemptive priorities // Technical Report № 016. EURANDOM, Eindhoven University of Technology, 2003.

Моделирование динамики численности занятого населения по возрастным группам

Татьяна Фанадовна Мамедова¹, Александр Викторович Ландышев²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский
государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, Россия
¹mamedovatf@yandex.ru, ²Ne4ex00@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача моделирования и исследования динамики численности трудового населения Российской Федерации по возрастным группам. Расчет коэффициентов в математической модели производился модифицированным взвешенным методом наименьших квадратов и методом Левенберга – Марквардта. Получены результаты динамики трудового населения вплоть до 2027 г.

Ключевые слова: моделирование, динамика народонаселения, прогнозирование, демографические процессы, математическая модель

Modeling the dynamics of the employed population by age groups

Tat'yana F. Mamedova¹, Aleksandr V. Landyshev²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹mamedovatf@yandex.ru, ²Ne4ex00@gmail.com

Abstract. The problem of modeling and studying the dynamics of the working population of the Russian Federation by age groups is considered. The coefficients in the mathematical model were calculated using the modified weighted least squares method and the Levenberg-Marquardt method. The results of the dynamics of the working population up to 2027 are obtained.

Keywords: modeling, population dynamics, forecasting, demographic processes, mathematical model

Современные схемы демографических, геополитических и экономических процессов характеризуются крайней неустойчивостью. Мировое общество сталкивается с множеством разнообразных кризисов, будь то финансовый, продовольственный или любой другой, проводит широкомасштабные международные инициативы, приводящие к новым изменениям в мире. На фоне данных факторов крайне необходимо проводить прогнозирование и их последующее исследование на основе статистических данных в социологическо-математических моделях.

Нахождение решения сложных социальных проблем на основе системного анализа возможно лишь при использовании математических методов и современной вычислительной техники, в частности математи-

ческих пакетов и языков программирования. Использование вышеперечисленных ресурсов будет эффективно лишь в случае корректного подбора способов обработки полученных данных и доказательства искомым закономерностей.

Для анализа и прогноза динамики численности возрастной структуры занятого населения использовалась математическая модель следующего вида [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_1 + (K_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = b_2 + (K_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = b_3 + (K_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2)x_3 \end{cases} \quad (1)$$

где x_i – численность занятых i -й возрастной группы, b_i – коэффициенты миграционных потоков i -й возрастной группы, K_i – коэффициенты притока численности занятых и экономически неактивного населения i -й возрастной группы, a_{ij} – коэффициенты влияния i -й возрастной группы, на j -ю возрастную группу. Знак коэффициента ($a_{ij}; a_{ji}$) имеет свое значение, зависящее от типа взаимодействия, данные коэффициенты дают дополнительную информацию о взаимодействиях возрастных групп друг с другом, $i = \overline{1,3}$.

Рассматривались взаимодействия трудового населения среди групп: 30-34, 40-44, 50-54 лет.

Расчет коэффициентов производился модифицированным взвешенным методом наименьших квадратов и методом Левенберга – Марквардта. Этот метод заключается в поиске соответствующих весов, стоящих перед суммами квадратов отклонений фактических численностей от соответствующих координат точек интегральных кривых системы (1), вариации начальных условий и минимизации функционала невязки, то есть решения оптимизационной задачи вида [2]:

$$\begin{aligned} J(u) = \mu_1 \sum_{j=1}^N \left(x_1^*(t_j) - x_1(t_j, u) \right)^2 + \mu_2 \sum_{j=1}^N \left(x_2^*(t_j) - x_2(t_j, u) \right)^2 + \\ + \mu_3 \sum_{j=1}^N \left(x_3^*(t_j) - x_3(t_j, u) \right)^2 \rightarrow \min_{u \in D}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u = (b_1, b_2, b_3, K_1, K_2, K_3, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32})^T$ – вектор искомых коэффициентов системы (1), $x_1(t_j, u)$, $x_2(t_j, u)$, $x_3(t_j, u)$ – решение си-

системы (1) в t_j момент времени, $x_i^*(t_j)$ – фактические численности занятых i -й группы населения, $\mu_i > 0 (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0)$ являются показателем частных критериев оптимизационной задачи (2).

В результате расчета коэффициентов, была получена система вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0,54 + (0,084 + 0,00005591x_2 + 0,00004313x_3)x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0,0001 + (-0,017 + 0,00004376x_1 + 0,00006094x_3)x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0,081 + (-0,03 - 0,00006492x_1 + 0,00003342x_2)x_3 \end{cases}$$

Решая данную систему методом Рунге-Кутты, получаем следующие результаты, изменения динамики численности трудового населения, представленные на графике (рисунок 1).

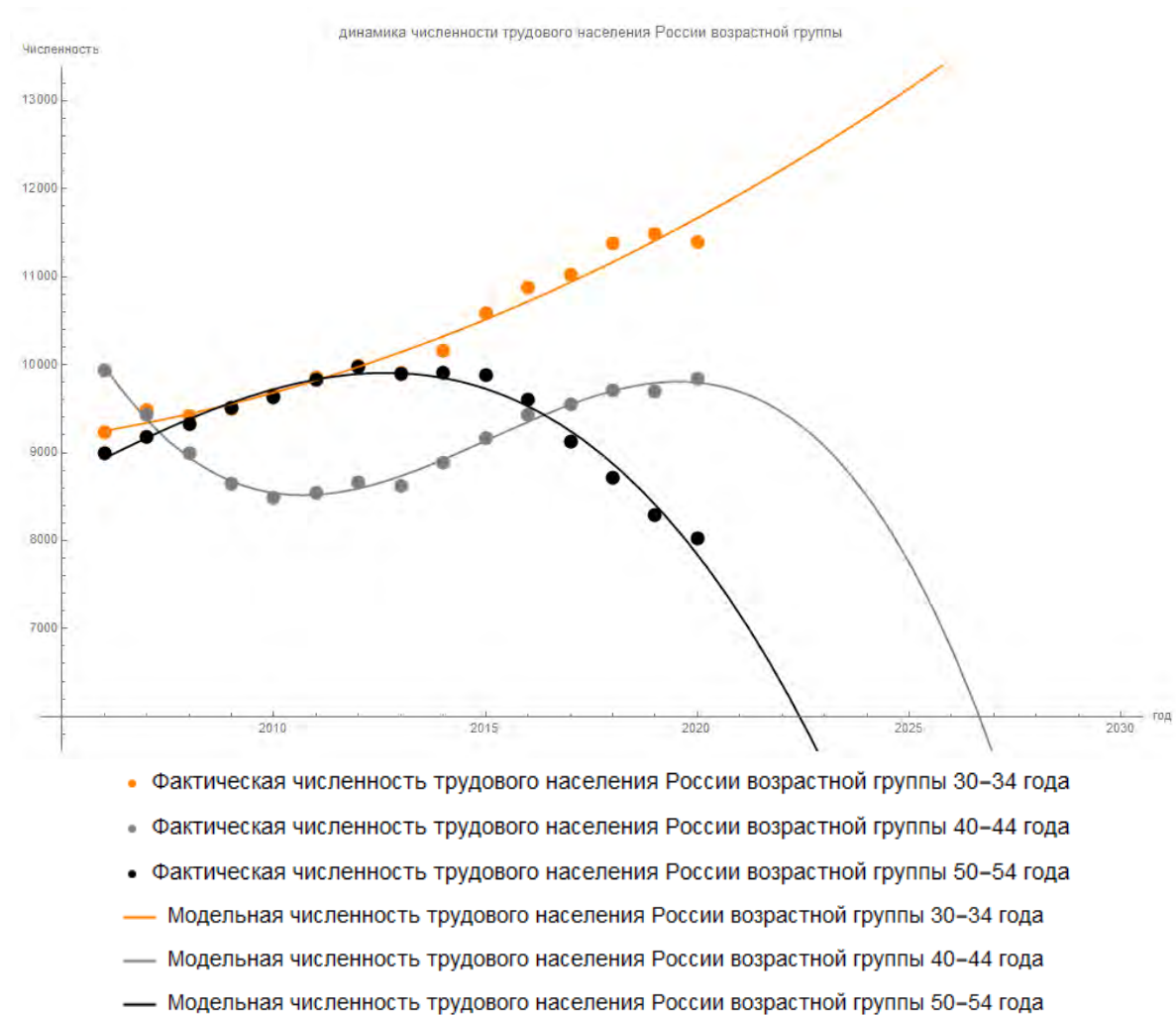


Рис. 1. Динамика численности трудового населения Российской Федерации по возрастным группам

Таким образом, получены следующие результаты: миграционный поток наиболее сильный у возраста 30-34, что косвенно указывает на более стремительный прирост работников из других стран. Коэффициенты перетока численности занятых и экономически неактивного населения значительно больше у первой группы, что показывает на прирост занятых людей данного возраста из предшествующих групп и больший шанс трудоустроиться в данном возрасте, по сравнению с представленными группами населения. Причем у людей возраста 40-44 и 50-54 прирост отрицательный, что указывает на возможный переход у данного разряда общества на неофициальный заработок либо уход по состоянию здоровья. Рассматривая коэффициенты возрастных групп можно сделать вывод, что люди 30-34 лет дискриминируют людей 50-54. Это указывает, что более молодые и перспективные работники предпочтительнее старых. В остальных случаях происходит партнерство, что способствует более благополучному приросту трудящегося населения.

Оценка приближения модельной кривой народонаселения Российской Федерации представлена в табл. 1.

Таблица 1

Оценка модели	30-34 года	40-44 года	50-54 года
$A_{cp}, \%$	2,14	11,3	2,57
R^2	0,72	0,92	0,92

Модель показывает результаты динамики трудового населения вплоть до 2027 года и, очевидно, что никаких стремительных изменений, таких как колоссальный рост или падение к отрицательным показателям не произойдет, так как общая численность населения всегда ограничена. Таким образом, при пересечении определенной отметки ограничения должен произойти фазовый переход смены структуры занятости.

Список литературы

1. Андреев В. В., Семенов М. И. Математическое моделирование динамики социально-экономической системы России: определение наилучшего пути развития // Нелинейный мир. 2013. Т. 11, № 1. С. 58–72.
2. Вдовин В. М., Суркова Л. Е., Валентинов В. А. Теория систем и системный анализ : учебник. 5-е изд., стер. М. : Дашков и К°, 2020. 644 с.

Математическое моделирование поведения компаний в условиях конкурентной борьбы

Анна Андреевна Шалаева¹, Татьяна Фанадовна Мамедова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, Россия
¹Liyaskinaa@mail.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Исследуется задача взаимодействия наиболее популярных EdTech компаний на рынках образовательных площадок России в рамках конкурентной борьбы. Составлена и проанализирована математическая модель, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены результаты, позволяющие судить о высокой конкурентной борьбе среди крупнейших компаний в области онлайн-образования.

Ключевые слова: модель «хищник-жертва», моделирование, онлайн-образование, компьютерные технологии

Mathematical modeling of the behavior of companies in a competitive environment

Anna A. Shalaeva¹, Tat'yana F. Mamedova²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹Liyaskinaa@mail.ru, ²mamedovatf@yandex.ru

Abstract. This paper examines the problem of interaction of the most popular EdTech companies in the markets of educational platforms in Russia, within the framework of competition. A mathematical model described by a system of ordinary differential equations is compiled and analyzed. The results obtained allow us to judge the high competition among the largest companies in the field of online education.

Keywords: The predator-prey model, Modeling, Online education, Computer technology

В данное время происходит значительный рост EdTech (от англ. education – «образование» и technology – «технологии») – проектов в области образовательных технологий. Появилось значительное количество онлайн-школ, повысилась конкуренция, возросло качество контентная составляющая, появилось много новинок в данной сфере, включая все уровни: школьный, вузовский и в дополнительном онлайн-образовании. За основу взяты исследования внутри компаний и официальные данные.

Для выявления факторов, влияющих на выживаемость онлайн-школ, была проанализирована деятельность нескольких крупнейших

онлайн-школ по подготовке школьных предметов в России за последние пять лет и, полученная ими за это время чистая прибыль.

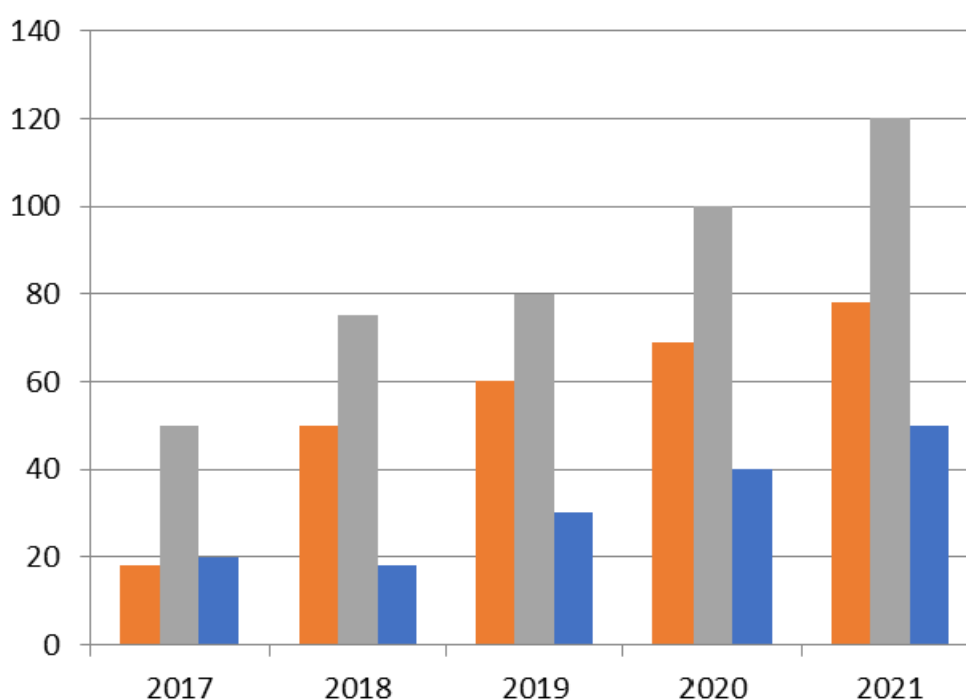


Рис. 1. Чистая прибыль компаний

Период 2017-2019 года был относительно спокойным для данной области. Для EdTech рынка 2020-й стал годом рекордного роста и серьезных испытаний одновременно. И продолжается рост и развитие по данный момент.

Для более детального анализа, с учетом прогнозирования была составлена динамическая модель «Хищник-жертва», которая на данный момент продолжает совершенствоваться, в частности, в экономических исследованиях и позволяет адекватно описать взаимодействие рынка EdTech компаний в России.

Рассмотрим систему следующего вида [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 - b_1x_1^2 - c_{12}x_1x_2 - c_{13}x_1x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2x_1 - b_2x_2^2 - c_{21}x_2x_1 - c_{23}x_2x_3 ; \\ \frac{dx_3}{dt} = a_3x_1 - b_3x_3^2 - c_{31}x_3x_1 - c_{32}x_3x_2 \end{cases}$$

где x_i – чистая прибыль компании, a_i – коэффициенты рождаемости новых компаний, b_i – коэффициент смертности «ликвидации», c_{ij} – коэффициент взаимодействия компании вида i и j , $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$

С помощью статистического анализа были вычислены коэффициенты, которые показывают степень подавления между компаниями. Решая данную динамическую проблему и обращаясь к регрессионному анализу, получаем систему дифференциальных уравнений в следующем вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 1,52x_1 - 1,04x_1^2 + 0,85x_1x_2 - 0,04x_1x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 1,33x_1 - 1,02x_2^2 + 0,25x_2x_1 + 0,08x_2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = 1,21x_1 - 1,08x_3^2 - 0,95x_3x_1 + 5,73x_3x_2 \\ x_1(t_0) = 1; x_2(t_0) = 1; x_3(t_0) = 1. \end{cases}$$

Решая данную систему методом Рунге-Кутта, получаем следующие результаты, представленные на графике, которые позволяют смоделировать прибыль компаний в будущем (рисунок 2).

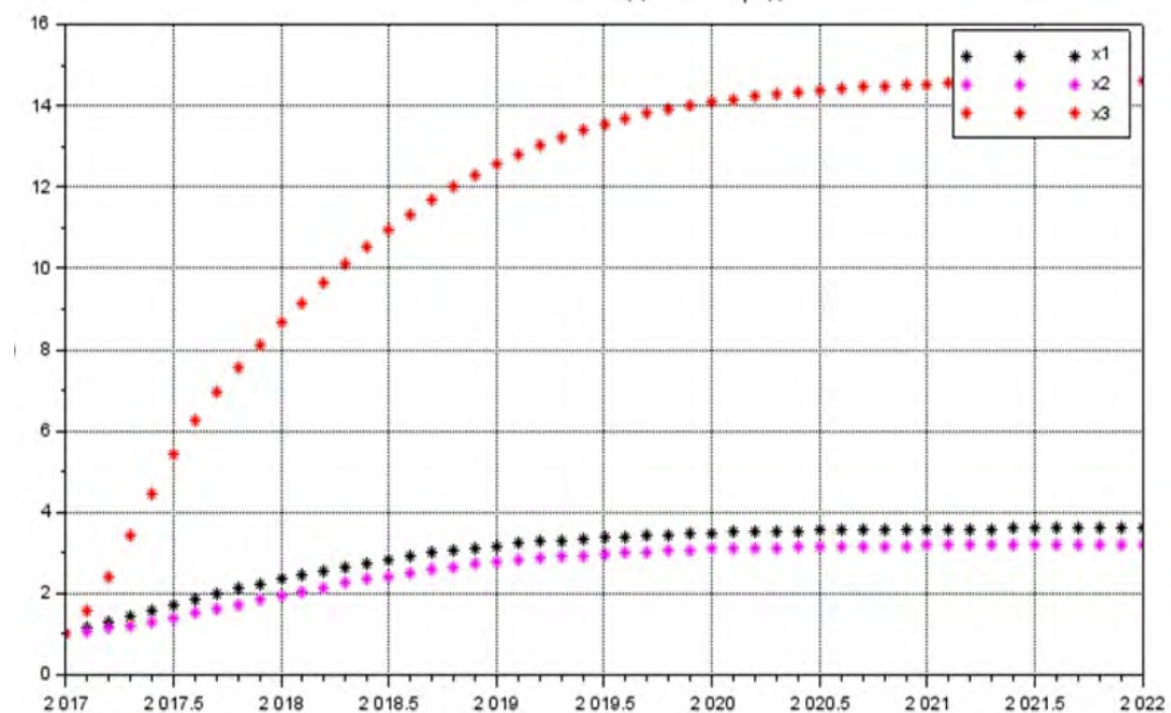


Рис. 2. Моделирование чистой прибыли компаний

Полученные результаты моделирования хорошо соотносятся с эмпирическими данными, что позволяет судить об адекватности модели и пригодности ее для дальнейшего прогнозирования состояния системы [2-3].

Проанализировав полученные результаты, можно выдвинуть гипотезы о дальнейшем развитии EdTech компаний внутри России. Основная

идея заключается в том, что со временем сформируется некий «хищник - лидер», что позволит стратифицировать и сохранить баланс «жизнедеятельности» в данной сфере, при этом должна сохраниться строгая сегментация отдельных областей российского рынка образования.

Список литературы

1. Амадова Г. М. Математическая модель динамики трех популяций «два хищника – жертва» с внутривидовой конкуренцией жертвы // XI век: фундаментальная наука и технологии. 2017. Т. 1. С. 157–161.
2. Денисенко И. А. Особенности и тенденции продвижения дополнительных профессиональных образовательных услуг // СЕРВИС PLUS. Черкизово : Российский государственный университет туризма и сервиса, 2019. Т. 13, № 3. С. 41–50.
3. Краснова Г. А., Нухулы А., Тесленко В. А. Электронное образование в мире и России: состояние, тенденции и перспективы // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. 2017. Т. 14, № 3. С. 371–377.

Исследование пространственных моделей иммунологии

Айтач Мубариз-кызы Байрамова

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
bairamova01@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается модель пространственно-распределенной вирусной популяции с временной задержкой и без запаздывания по времени, а также исследуется метод приближенного восстановления функции концентрации вируса.

Ключевые слова: иммунология, вирусная популяция, пространственно-временная динамика, уравнение реакции-диффузии, распространение вируса без временной задержки, операторный метод решения нелинейных уравнений

Investigation of spatial models of immunology

Aytach M. Bayramova

Penza State University, Penza, Russia
bairamova01@inbox.ru

Abstract. A model of a spatially distributed viral population with a time delay and without a time delay is considered, and a method for approximate restoration of the virus concentration function is investigated.

Keywords: immunology, viral population, space-time dynamics, reaction-diffusion equation, virus propagation without time delay, an operator method for solving non-linear equations

1. Модель пространственно-распределенной вирусной популяции

Рассмотрим математическую модель пространственно-временной динамики вирусной инфекции с учетом противовирусного иммунного ответа. Модель формулируется в виде одномерного уравнения реакции-диффузии для пространственно-распределенной вирусной популяции с начальным условием и учитывает индуцированную вирусом клональную экспансию Т-клеток, также их гибель в результате апоптоза.

Для того чтобы сформулировать уравнение динамики вируса, предположим, что доза антигена – период времени, в течение которого он доступен, и его «географическое» распределение внутри данного хозяина влияют на продолжительность и степень иммунных реакций [6]. Лежащая в основе регуляция подразумевает колоколообразную взаимосвязь между вирусной нагрузкой и величиной противовирусного Т-

клеточного ответа, так что высокое количество антигена приводит к истощению Т-клеток [4, 5]. Биологическая схема модели и соответствующие процессы показаны на рисунке 1.



Рис. 1. Схематическое изображение регуляции динамики вирусной инфекции [3]

Предполагается, что величина клональной экспансии является нелинейной функцией вирусной нагрузки с задержкой по времени. Рассмотрим уравнение для концентрации вируса v в лимфоидных органах, таких как селезенка или лимфатические узлы:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k(1-v)v - f(v(t-\tau, x))v(t, x), \quad (1.1)$$

$$v(0, x) = \varphi(x). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) представляет собой квазилинейное функциональное уравнение реакции-диффузии, а (1.2) – начальное условие (1.1). Первый член в правой части уравнения описывает распространение вируса, второй член – его продукцию, а последний член – его элиминацию клетками CTL. Параметр D представляет собой коэффициент диффузии, а k – константу скорости репликации. Параметризованная функция $f(v(t-\tau, x))$ характеризует индуцированную вирусом клональную экспансию Т-клеток, т.е. количество и функцию этих клеток, генерируемых после некоторой временной задержки τ , т.е. она зависит от концентрации вируса за некоторое время до этого. Качественная форма этой функции показана на рисунке 2.

Инфекция низкого уровня стимулирует иммунный ответ (рис. 1), в то время как инфекция высокого уровня подавляет его. Первое соответствует растущей ветви функции $f(v)$ на рисунке 2, а второе – ее убывающей ветви.

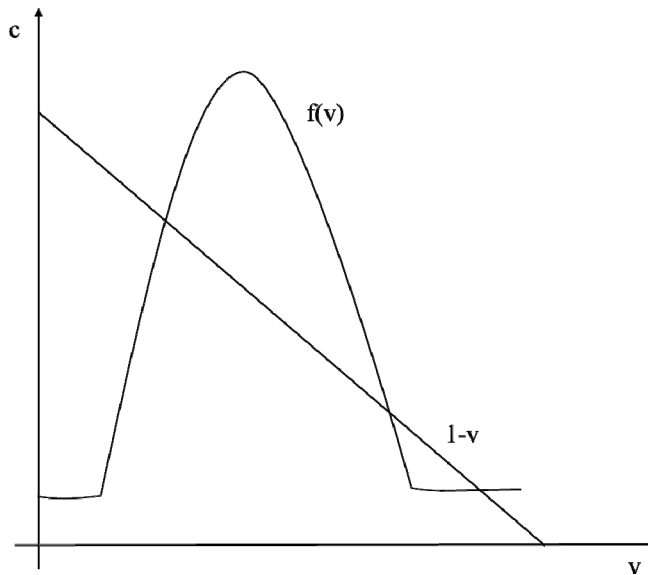


Рис. 2. Качественная форма функции $f(v)$ [3]

1.1. Распространение вируса без запаздывания по времени

Модель (1.1)-(1.2) используется для идентификации и характеристики некоторых фундаментальных типов и закономерностей пространственно-временной динамики вирусных инфекций в тканях. Рассмотрим эту модель без временной задержки, т.е. при $\tau = 0$. В этом случае распределение вируса в тканях, таких как селезенка или лимфатический узел, может быть описано уравнением реакции-диффузии

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k(1-v)v - f(v)v. \quad (1.1.1)$$

$$v(0, x) = \varphi(x). \quad (1.2.1)$$

В отличие от уравнения (1.1), (1.1.1) предполагает, что время, необходимое клеткам для размножения и миграции к месту заражения, учитывается косвенно через характеристики функции $f(v)$, а не через явную временную задержку τ . В (1.1.1) $v = v(t, x)$ – безразмерная нормированная концентрация вируса, $x \in R$, $t \in [0; \infty)$.

2. Численный метод решения

2.1. Операторный метод

Для решения уравнения (1.1)-(1.2) используется непрерывный операторный метод решения нелинейных уравнений: выполняется переход к вспомогательной системе интегродифференциальных уравнений специального вида, которая далее решается при помощи одного из численных методов решения дифференциальных уравнений.

Пусть имеется нелинейное операторное уравнение в банаховом пространстве B :

$$A(x)f = 0, \quad x \in B, \quad (2.1.1)$$

где оператор $A: B \rightarrow B$ является нелинейным.

Согласно непрерывному операторному методу, с уравнением (2.1.1) связывается задача Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\sigma} = A(\bar{x}(\sigma)) - f, \quad (2.1.2)$$

$$\bar{x}(0) = \chi, \quad (2.1.3)$$

для дифференциального уравнения относительно вспомогательной функции $\bar{x}(\sigma)$. Здесь χ – произвольный элемент банахова пространства B .

$\Lambda(A)$ – логарифмическая норма оператора A . Справедливы следующие теоремы, доказательства которых приведены в статье [0].

Теорема 1. Пусть уравнение (2.1.1) имеет решение x^* , и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в банаховом пространстве B , справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \quad (2.4)$$

Тогда решение задачи (2.1.2)-(2.1.3) сходится при t , стремящемся к бесконечности, к решению x^* уравнения (2.1.1) при любом начальном приближении.

Теорема 2. Пусть уравнение (2.1.1) имеет решение x^* , и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $R(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

– при любом t ($t > 0$) справедливо равенство $\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0$;

– имеет место неравенство (2.1.4).

Тогда решение задачи Коши (2.1.2)-(2.1.3) сходится при t , стремящемся к бесконечности, к решению уравнения (2.1.1).

2.2. Метод интегральных уравнений

Для решения начальной задачи (1.1)-(1.2) воспользуемся, следуя [1], методом интегральных уравнений. Сведем начальную задачу (1.1)-(1.2) к интегральному уравнению

$$v(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(k(1-v(s, \xi))v(s, \xi) - f(v(s-\tau, x))v(s, \xi) \right) G(x, \xi, t-s) d\xi ds, \quad (2.2.1)$$

где $G(x, \xi, t)$ определяется следующим образом

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}.$$

Необходимо восстановить функцию $v(t, x)$ в конечной области $\Omega = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, -A \leq x \leq A\}$, где A – достаточно большое вещественное положительное число. Введем на множестве Ω сетку узлов (t_i, x_j) , где $t_i = i\tau$, $x_j = -A + jh$, $i = \overline{0, M}$, $j = \overline{0, N}$, $\tau = T/M$, $h = 2A/N$, и M, N – достаточно большие целые положительные числа.

Обозначим $v_{i,j} = v(t_i, x_j)$. Восстановим $v(t, x)$ в области Ω в виде дискретного множества приближенных значений $\{v_{i,j}\}_{i=\overline{1, M}, j=\overline{0, N}}$ в точках сетки (t_i, x_j) . Значения $\{v_{0,j}\}_{j=\overline{0, N}}$ – являются известными из начального условия (3.1.2):

$$v_{0,j} = \varphi(x_j), \quad j = \overline{0, N}.$$

Приравняем левые и правые части уравнения (2.2.1) в точках (t_i, x_j) :

$$v_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x_j, \xi, t_i) d\xi + \int_0^{t_i} \int_{-\infty}^{\infty} k(1-v(s, \xi)) \times \\ \times v(s, \xi) G(x_j, \xi, t_i - s) - f(v(s-\tau, x_j))v(s, \xi) G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds, \quad (2.2.2)$$

Первый интеграл в (2.2.2) аппроксимируем квадратурной формулой трапеций [1]

$$\text{Обозначим} \quad \Psi_{1,i,j} = \frac{h}{2} \sum_{l=0}^{N'-1} \{v_{0,l} G(x_j, x_l, t_i) + v_{0,l+1} G(x_j, x_{l+1}, t_i)\} \quad \text{и}$$

$$\Phi(t, x, v(t, x)) = k(1-v(s, \xi))v(s, \xi) - f(v(s-\tau, x_j))v(s, \xi).$$

Для аппроксимации двумерного интеграла в (2.2.2) разобьем область приближенного интегрирования $[0, t_i] \times [-A, A]$ точками (t_k, x_l) ($k = \overline{0, i}$, $l = \overline{0, N}$) на прямоугольники $[t_k, t_{k+1}] \times [x_l, x_{l+1}]$, в каждом из

которых заменим функцию $\Phi(t, x, v(t, x))$ постоянной, определяемой как среднее арифметическое значение этой функции, взятое по вершинам прямоугольника $[t_k, t_{k+1}] \times [x_l, x_{l+1}]$. В результате получаем следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned}
& \int_{0-\infty}^{t_i} \int \Phi(s, \xi, v(s, \xi)) G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds \\
& \approx \int_{0-A}^{t_i} \int^A \Phi(s, \xi, v(s, \xi)) G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds \\
& = \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \Phi(s, \xi, v(s, \xi)) G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds \\
& \approx \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \left[\Phi(t_k, x_l, v_{k,l}) + \Phi(t_k, x_{l+1}, v_{k,l+1}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \Phi(t_{k+1}, x_l, v_{k+1,l}) + \Phi(t_{k+1}, x_{l+1}, v_{k+1,l+1}) \right] \mu_{i,j,k,l} \right\} \quad (2.3.2)
\end{aligned}$$

где $t_0 = 0$, а $\mu_{i,j,k,l}$ – аппроксимация интегралов

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} G(x_j, \xi, t_i - s) d\xi ds.$$

Для аппроксимации $\mu_{i,j,k,l}$ воспользуемся двухмерным аналогом формулы трапеций:

$$\begin{aligned}
\mu_{i,j,k,l} = \frac{\tau h}{4} \cdot \{ & G(x_j, x_l, t_i - t_k) + G(x_j, x_{l+1}, t_i - t_k) + \\
& + G(x_j, x_l, t_i - t_{k+1}) + G(x_j, x_{l+1}, t_i - t_{k+1}) \}. \quad (2.2.4)
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (2.2.2) аппроксимируется уравнением

$$\begin{aligned}
v_{i,j} = \Psi_{1,i,j} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^{N-1} \{ & \left[\Phi(t_k, x_l, v_{k,l}) + \Phi(t_k, x_{l+1}, v_{k,l+1}) + \right. \\
& \left. + \Phi(t_{k+1}, x_l, v_{k+1,l}) + \Phi(t_{k+1}, x_{l+1}, v_{k+1,l+1}) \right] \mu_{i,j,k,l} \}, \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение обозначение

$$\Psi_{2,i,j} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \left[\Phi(t_k, x_l, v_{k,l}) + \Phi(t_k, x_{l+1}, v_{k,l+1}) + \right. \right.$$

$$+ \Phi(t_{k+1}, x_l, v_{k+1,l}) + \Phi(t_{k+1}, x_{l+1}, v_{k+1,l+1}) \mu_{i,j,k,l} \} + \\ + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \left[\Phi(t_{i-1}, x_l, v_{i-1,l}) + \Phi(t_{i-1}, x_{l+1}, v_{i-1,l+1}) \right] \mu_{i,j,i-1,l} \right\}.$$

Тогда (2.2.5) примет вид:

$$v_{i,j} = \Psi_{1,i,j} + \Psi_{2,i,j} + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \left[\Phi(t_i, x_l, v_{i,l}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, v_{i,l+1}) \right] \mu_{i,j,i-1,l} \right\}, \quad (2.2.6)$$

Уравнение (2.2.6) служит основой для построения численного метода решения задачи (1.1)-(1.2).

К решению системы (2.2.6) применим непрерывный операторный метод и получим систему дифференциальных уравнений. К ней применим метод Эйлера, как один из наиболее простых методов решения дифференциальных уравнений [1]. Тогда получим следующую вычислительную схему:

$$\bar{v}_{i,0,m+1} = \bar{v}_{i,0,m} + \theta \gamma_0 \left\{ \Psi_{1,i,0} + \Psi_{2,i,0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \left[\Phi(t_i, x_l, \bar{v}_{i,l,m}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, \bar{v}_{i,l+1,m}) \right] \mu_{i,0,i-1,l} - \bar{v}_{i,0,m} \right\} \right\}, \quad (2.2.7)$$

$$\bar{v}_{i,1,m+1} = \bar{v}_{i,1,m} + \theta \gamma_1 \left\{ \Psi_{1,i,1} + \Psi_{2,i,1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \left[\Phi(t_i, x_l, \bar{v}_{i,l,m}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, \bar{v}_{i,l+1,m}) \right] \mu_{i,1,i-1,l} - \bar{v}_{i,1,m} \right\} \right\}, \quad (2.2.8)$$

.....

$$\bar{v}_{i,N,m+1} = \bar{v}_{i,N,m} + \theta \gamma_N \left\{ \Psi_{1,i,N} + \Psi_{2,i,N} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \left[\Phi(t_i, x_l, \bar{v}_{i,l,m}) + \Phi(t_i, x_{l+1}, \bar{v}_{i,l+1,m}) \right] \mu_{i,N,i-1,l} - \bar{v}_{i,N,m} \right\} \right\}, \quad (2.2.9)$$

где $m = \overline{1, L-1}$.

Одна итерация метода Эйлера реализуется посредством последовательного вычисления значений $\bar{v}_{i,0,m+1}, \dots, \bar{v}_{i,N,m+1}$ по вышеуказанным формулам при фиксированном значении m .

Автор благодарен к.т.н., доценту В.А. Рязанцеву за внимание к работе.

Список литературы

1. Бойков И. В., Рязанцев В. А. О применении непрерывного операторного метода к решению прямой задачи для нелинейных параболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Физико-математические науки. 2020. № 1 (53). С. 97–112.
2. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.
3. Bocharov G., Meyerhans A, Bessonov N., Trofimchuk S., Volpert V. Spatiotemporal Dynamics of Virus Infection Spreading in Tissues // PlosOne. 2016. P. 1–27.
4. Richter, K., Brocker T., Oxenius A. Antigen amount dictates CD8⁺ T-cell exhaustion during chronic viral infection irrespective of the type of antigen presenting cell // European Journal of Immunology. 2012. doi:10.1002/eji.201142275
5. Wherry E. J., Kurachi M. Molecular and cellular insights into T cell exhaustion // Nature Reviews Immunology. 2015. Vol. 15, № 8. P. 486–499.
6. Zinkernagel R. M., Hengartner H. Regulation of the immune response by antigen // Science. 2001. Vol. 293. P. 251–253.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 681.586.773.088.8; 621.317

Некоторые аспекты измерения уровня жидкостей

**Елена Владимировна Грозная¹, Петр Петрович Першенков²,
Александр Валерьевич Савенков³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹kedrel@mail.ru, ^{2,3}Peter_bmw@mail.ru

Аннотация. Приведен анализ возможных решений для измерения уровня жидких веществ и предложение оптимальных способов для инновационного проектирования датчиков уровня жидких веществ, используемых для измерительных целей. Для бесконтактного измерения уровня жидкости целесообразно применять ультразвуковые датчики уровня. Ультразвуковые датчики действуют по принципу эхолокации. Скорость распространения звуковых волн снижается с понижением температуры воздушной среды. Погрешность измерения с учетом влияния изменения температуры контролируемой среды составляет 0,1–0,2 % на 10 °С изменения температуры. Влияние температуры в процессе измерения приводит к снижению точности определения уровня, поэтому повышение точности датчиков при нестационарной температуре рабочей среды является актуальной задачей в настоящее время. Целью проведенной работы является исследование тенденций развития ультразвуковых датчиков уровня жидких сред на основе патентной и технической информации для поиска способов уменьшения температурной погрешности измерений и подтверждения актуальности таких исследований.

Ключевые слова: ультразвуковой датчик уровня жидкости, уровнемер, погрешность, температура, коррекция, ультразвук, уровень, патент, распределение патентов

Some aspects of measurement ultrasonic level meters

Elena V. Groznaya¹, Petr P. Pershenkov², Aleksandr V. Savenkov³

^{1,2,3}Penza State University, Russia, Penza

¹kedrel@mail.ru, ^{2,3}Peter_bmw@mail.ru

Abstract. For non-contact liquid level measurement, it is advisable to use ultrasonic level sensors. Ultrasonic sensors operate on the principle of echolocation. The speed of propagation of sound waves decreases with decreasing temperature of the air environment. The measurement error, taking into account the effect of the change in the temperature of the controlled medium, is 0,1–0,2 % per 10 °C of the tempera-

ture change. The influence of temperature in the process of measurement leads to a decrease in the accuracy of the determination of the level, so increasing the accuracy of the sensors with non-stationary temperature of the working medium is an actual task at the present time. The purpose of this work is to study trends in the development of ultrasonic level sensors for liquid media based on patent and technical information to find ways to reduce the temperature error of measurements and to confirm the relevance of such studies.

Keywords: ultrasonic liquid level sensor, level gauge, error, temperature, correction, ultrasound, level, patent, patent distribution

Ультразвуковые датчики уровня жидкостей [1-14] используются для определения уровня жидких веществ в различных емкостях при хранении, транспортировке и для контроля расхода в различных технологических процессах. Ультразвуковые датчики действуют по принципу эхолокации – расстояние до объекта рассчитывается на основании измерения промежутка времени между моментами послышки и приема звукового импульса и скорости звука в среде. Скорость распространения звуковых волн снижается с понижением температуры воздушной среды. Большинство производителей в спецификации к ультразвуковым датчикам указывают коэффициент температурной погрешности, выраженный в % на один градус температуры [1]. Погрешность измерения с учетом влияния изменения температуры контролируемой среды составляет 0,1–0,2 % на 10 °С изменения температуры [2]. Влияние температуры в процессе измерения приводит к снижению точности определения уровня, поэтому повышение точности датчиков при нестационарной температуре рабочей среды является актуальной задачей в настоящее время.

Целью проведенной работы является исследование тенденций развития ультразвуковых датчиков уровня жидких сред на основе патентной и технической информации для поиска способов уменьшения температурной погрешности измерений и подтверждения актуальности таких исследований [3-9].

Анализируя тенденции развития по патентно-технической информации [10] изучены патентные материалы относительно ультразвуковых датчиков уровня жидких сред за 20 лет в период с 1996 по 2016 год включительно. Использовались базы данных полных описаний изобретений национальных патентных ведомств и международных организаций: Роспатент (Россия) [11], Патентный офис США [12], Европейская патентная организация (ЕПО) [13], Всемирная организация интеллектуальной собственности (ВОИС) [14]. Ключевые слова для поиска были следующие: ультразвуковой датчик уровня жидкости, уровнемер, датчик уровня жидкости, ультразвуковой уровнемер, измеритель уровня жидкости, погрешность, температура, коррекция, ультразвук, уровень. В результате поиска по исследуемой теме были отобраны 176 патентов, по которым произведен анализ тенденций развития. Количество выданных

патентов с 1996 по 2016 г. составляет в среднем 9 шт. в год, с 2000 по 2005 г. – 6 шт. в год, с 2007 по 2012 г. повышается в среднем до 15 шт. в год. Наибольшее количество выданных патентов наблюдается в 2007 г. – 20 шт. С 2013 г. количество выданных патентов по исследуемой теме составляет примерно 6 шт. в год. Диаграмма роста количества выданных патентов показана на рисунке 1. На рисунке 2 показана диаграмма распределения выданных изобретателям патентов по странам: Россия – 116 шт., Китай - 41 шт., Япония – 6 шт., США – 12 шт., Канада – 1 шт.

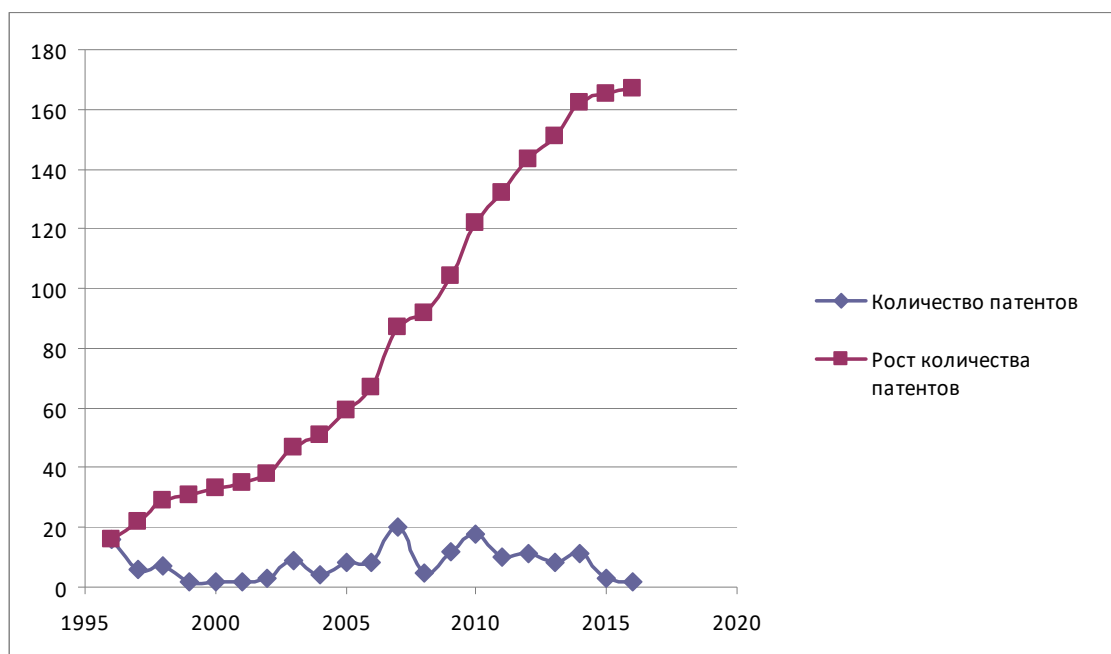


Рис. 1. Рост количества выданных патентов

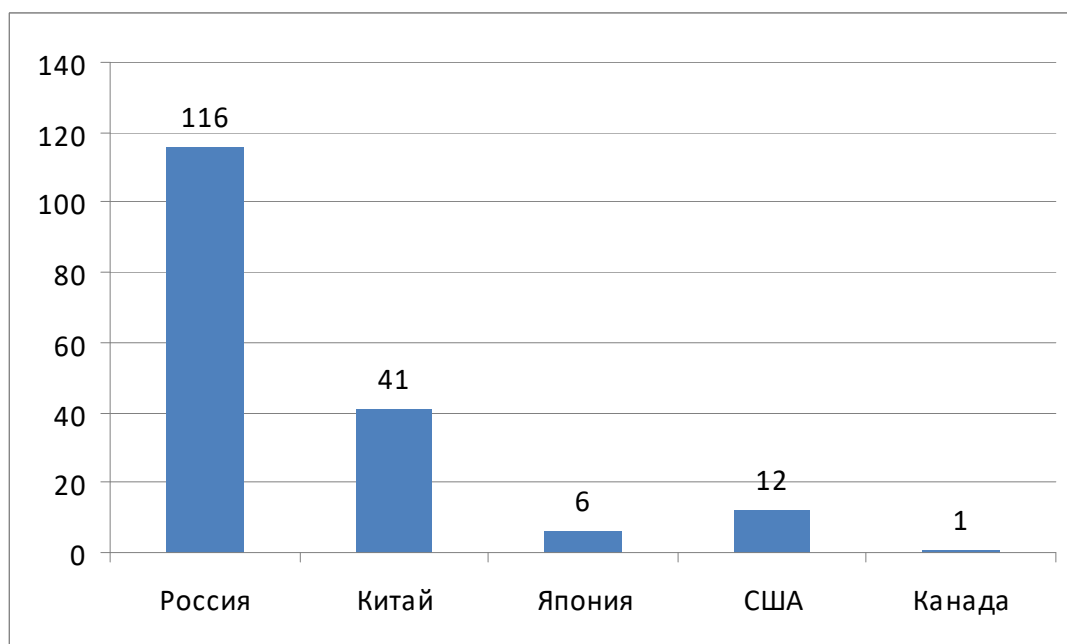


Рис. 2. Распределение выданных патентов по странам

Лидерами являются Россия, Китай и США по количеству изобретений, которые косвенно указывают на объемы научных исследований, связанных с ультразвуковыми датчиками уровня жидкости. В этих странах хорошо развито машиностроение, судостроение, топливно-энергетический комплекс и другие отрасли народного хозяйства. Лидерами по количеству национальных патентов являются Россия, Китай и США.

Проанализированы описания изобретений, найденных в процессе поиска, установлены задачи изобретений и технические результаты, которые отображают технико-экономические показатели, улучшение которых может быть важно для развития ультразвуковых датчиков уровня жидкости. Для выявления наиболее значимых тенденций патенты распределены в соответствии с решаемыми в них задачами. Распределенное количество патентов (256 шт.) превышает количество найденных патентов (176 шт.) в связи с тем, что некоторые изобретения направлены на решение нескольких задач одновременно.

Распределение патентов в соответствии с решаемыми задачами следующее:

- повышение точности – 30,5 % (79 шт.), из найденных изобретений наиболее интересными являются решения, описываемые в патентах: RU 2303243 C1 (внутри резервуара расположены приемный и излучающий преобразователи с регулируемым углом подачи электрического импульса), RU 2133015 C1 (в качестве приемоизлучающего пьезопреобразователя используется пульсирующая сфера, позволяющая сформировать направленное излучение ультразвуковых волн), RU 2174219 C1 (уровнемеры сопряжены с компьютером, программное обеспечение которого позволяет давать команды на подачу жидкости без участия оператора);

- повышение надежности – 13,5 % (34 шт.), из найденных изобретений наиболее интересными являются решения, описываемые в патентах: RU 2303243 C1 (излучающий и приемный преобразователи размещены в приемно-излучающем блоке внутри резервуара, излучатель установлен под углом, отличным от прямого), RU 2580907 C1 (чувствительный элемент выполнен в виде вертикально ориентированного волновода, с закрепленным на нем электро-акустическим преобразователем, один из волноводов является излучателем акустических импульсов, другой - приемником).

- расширение функциональных возможностей – 10,8 % (28 шт.), из найденных изобретений наиболее интересными являются решения, описываемые в патентах: RU 2310174 C1 (сигнальный электроакустический преобразователь закреплен в верхней части звукопровода и подключен к информационному входу вычислительного блока, а в качестве отражающей нагрузки использован постоянный магнит, закрепленный в нижней части звукопровода), RU 14099 U1 (на объекте измерения имеется электрический преобразователь, процессор, аналого-цифровой преобра-

зователь и приемопередатчик с антенной, а на мобильном терминале – антенна, приемопередатчик, процессор и пользовательский интерфейс).

- повышение чувствительности – 2,7 % (7 шт.), из найденных изобретений наиболее интересными являются решения, описываемые в патентах: RU 2292529 C2 (порог амплитуды эхо-сигнала при существенном его затухании, чтобы обеспечить по всей дистанции примерно одинаковое соотношение сигнал/помеха, следует сделать также убывающим во времени от момента излучения);

- улучшение конструкции – 23,% (61 шт.), из найденных изобретений наиболее интересными являются решения, описываемые в патентах: RU 66816 U1 (акустический датчик установлен на внешней поверхности одной из торцевых стенок емкости, имеющей попарно параллельные стенки и перпендикулярное им плоское днище прямоугольной формы), RU 2419074 C1 (отражатель в конце звукопровода выполнен в виде угольника с прямым углом между его сторонами и горизонтальной площадкой между ними так, что часть излучения от электроакустического преобразователя попадает на горизонтальную площадку под прямым углом, а часть - на сторону угольника под углом в 45° к поверхности).

- уменьшение температурной погрешности – 13,1 % (34 шт.)

Большинство изобретений за последние 20 лет, направленные на уменьшение температурной погрешности – отечественные. Акцент отечественных изобретений сделан на схемотехническое решение по коррекции погрешности.

Большинство изобретений, направленных на улучшение конструкции, за последние 20 лет в основном запатентованы Китаем. Китай более заинтересован в массовом производстве, быстром изготовлении, зачастую совершенно не ставя на первое место качество и долговечность изготавливаемых изделий. Быстрее переработать конструкцию известных аналогов других фирм, оставляя точность результата измерений на заднем плане, используя уже готовую электронику для анализа результата измерений.

Российские изобретения же в меньшей степени ориентированы, на улучшении конструкции, но более направлены на уменьшение погрешности измерения, в частности уменьшения температурной погрешности за счет анализа результатов измерений электронными блоками обработки информации. Ультразвуковые уровнемеры широко применяются в нефтяной промышленности для контроля уровня, расхода, объема нефтехранилищ при поставке и добыче углеводородов. Цистерны и емкости изготавливаются порой не на одно десятилетие, предусматривая заранее заложенную при проектировании определенную конструкцию устанавливаемых уровнемеров, поэтому частая переработка конструкции уровнемеров нецелесообразна, экономически неэффективна и трудоемка при переоснащении, так как зачастую емкости могут находиться в отдаленных и труднодоступных местах. Гораздо целесообразнее про-

известии улучшенную обработку выходного сигнала и скорректировать ряд погрешностей, вносимых: температурой внутренней и внешней окружающей среды, помехами при передаче сигнала, конструкцией и материалом емкости с жидкостью, типом жидкости, типом конкретного ультразвукового преобразователя и т.д.

Ультразвуковой преобразователь обладает высокой чувствительностью, что представляет собой как достоинство, так и недостаток, поскольку при измерении на результат будут влиять также неинформативные параметры, например температура. Как и большинство измерительных преобразователей, ультразвуковые датчики уровня жидкости имеют температурную погрешность, причем выделяют ее статическую и динамическую составляющую, возникающую при резких изменениях температуры. Доминирующую роль играют погрешности первичных преобразователей, непосредственно воспринимающих измеряемую величину. Практически все существующие методы коррекции температурной погрешности основаны на положении, что температуры окружающей и измеряемой среды остаются неизменными в течение всего измерительного процесса. Однако в реальных условиях эксплуатации средства измерения температура может существенно изменяться в процессе измерения [7].

Компенсация температурной погрешности является одной из приоритетных задач. В настоящее время предложены способы компенсации температурной погрешности, которые позволяют учесть нелинейность температурной характеристики девиации выходного сигнала датчика благодаря использованию микропроцессоров [8]. Первый основан на уменьшении влияния температуры на передаточную функцию датчика с помощью конструктивно-технологических и схемотехнических решений. Второй заключается в различных видах коррекции выходного сигнала датчика вспомогательными измерениями температуры или введением расчетных поправок, получаемых либо в процессе измерения, либо на основе априорно созданных моделей влияния температуры на выходной сигнал [9].

В 60-80-х годах XX века применение схемотехнических методов ограничивалось большими габаритными размерами радиодеталей и увеличенным нагревом электронных схем в процессе работы, низким быстродействием электронных компонентов и комплектующих электро-радиоизделий, входящих в состав блоков обработки выходного сигнала с датчиков, что не позволяло полноценно использовать весь потенциал схемотехнического метода компенсации температурной погрешности. Приблизительно с середины 90-х годов XX века наблюдается рост количества изобретений, направленных на повышение точности и коррекции погрешности с применением компьютерных систем для перевода выходного сигнала с датчика в цифровой код и дальнейшую обработку ин-

формации посредством специализированных программ с высоким быстродействием и точностью выдаваемого конечного результата измерения.

В настоящее время на рынке радиоэлектроники и компонентов электронных схем преобладает огромное количество микропроцессорных сборок, которые уже конструктивно предполагают в себе сочетание таких важных характеристик, как: малое потребление электроэнергии при работе, миниатюризация, легкий контроль и управление, а также встроенные решения по коррекции погрешности измерения на программном или схемотехническом уровне. Современные технологии позволяют разместить ультразвуковой преобразователь, датчик температуры, необходимые измерительные цепи датчика, блок обработки информации, обеспечивающий схемотехнический метод коррекции погрешности в одном корпусе. Такие характеристики, как повышение точности и уменьшение погрешности за счет схемотехнических методов представлены в большем числе изобретений, чем улучшение конструкции.

Заключение

Проведя анализ тенденций развития ультразвуковых датчиков уровня жидкости, можно сделать вывод о том, что научные исследования в большей степени направлены на возрастающую роль применения микропроцессоров в измерительных цепях для реализации схемотехнических методов уменьшения погрешности измерений, тем самым усложняя их структурные схемы.

Актуальность научных исследований в части повышения точности ультразвуковых датчиков уровня посредством схемотехнических способов уменьшения погрешности измерений, прежде всего от нестационарной температуры рабочей среды, подтверждается результатами представленного анализа тенденций развития.

Список литературы

1. Ультразвуковые датчики. Особенности применения и выбора / ООО «Глававтоматика». URL: <http://mega-sensor.ru> (дата обращения: 20.01.2017).
2. Ультразвуковой расходомер и уровнемер от производителя ПНП Сигнур / ПНП Сигнур. URL: <http://signur.ru> (дата обращения: 20.01.2017).
3. Бардышев В. И. Акустические и комбинированные методы измерения уровней двухслойных жидкостей // Акустический журнал. 2002. Т. 48, № 5. С. 589–595.
4. Сорокин П. В. Система контроля уровня жидких сред в герметичных резервуарах : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Томск, 2011. С. 19.
5. Кикот В. В. К вопросу о тенденциях развития пьезодатчиков акустического давления и способах уменьшения их температурной погрешности // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2016. № 2 (16). С. 58–63.
6. Чебурахин И. Н., Нефедьев Д. И. Коррекция температурной погрешности, аппроксимация градуировочных характеристик чувствительных элемен-

тов датчикопреобразующей аппаратуры с внутридатчиковой электроникой // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2015. № 4 (14). С. 32–41.

7. Хорошавина Е. А. Информационно-измерительные системы контроля давления с коррекцией динамической температурной погрешности : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Уфа, 2013. С. 19.

8. Тихоненков А. В., Солуянов Д. А. Компенсация мультипликативной температурной погрешности тензорезисторных датчиков // Технические науки – от теории к практике : материалы XIX междунар. заочной науч.-практ. конференции. Новосибирск : Изд-во СибАК, 2013. С. 143–150.

9. Борзов А. Б., Лихоеденко К. П., Цыганков В. Ю., Власов А. И., Тиняков Ю. Н., Андреев К. А., Цивинская Т. А. Термокомпенсация измерительного канала датчика давления на основе полупроводниковых интегральных преобразователей // Электронный научно-технический журнал «Наука и образование». 2012. № 11. С. 301–320.

10. ГОСТ Р 15.011–96. Патентные исследования. Содержание и порядок проведения. М., 1996. С. 23.

11. Информационно-поисковая система / ФГБУ «ФИПС». URL: <http://www.fips.ru> (дата обращения: 15.12.2016).

12. USPTO Patent Full-Text and Image Database // United States Patent and Trademark Office. URL: <http://www.uspto.gov> (дата обращения: 20.12.2016).

13. Espacenet search // European Patent Office. – URL: <http://ep.espacenet.com> (дата обращения: 26.12.2016).

14. Search WIPO // World Intellectual Property Organization. URL: <http://ipdl.wipo.int> (дата обращения: 10.01.2017).

Методы цифрового кодирования звуковых сигналов

Наталья Олеговна Пряничникова¹, Юлия Фридриховна Захарова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

^{1,2}olegzakharov@rambler.ru

Аннотация. Приводятся современные методы преобразования звуковых волн в цифровой формат, основанные на теореме Котельникова. Основное внимание уделяется импульсно-кодовой модуляции и адаптивной дифференциальной импульсно-кодовой модуляции.

Ключевые слова: теорема Котельникова, звуковые волны, цифровое кодирование

Methods of digital coding of sound signals

Natal'ya O. Pryanichnikova¹, Yuliya F. Zakharova²

^{1,2}Penza State University, Russia, Penza

^{1,2}olegzakharov@rambler.ru

Abstract. Modern methods for converting sound waves into digital format based on the Kotelnikov theorem are presented. The focus is on PCM and adaptive differential PCM.

Keywords: theorem of Kotelnikov, sound waves, digital coding

Звук – волна, колебание среды. В повседневной жизни мы сталкиваемся с воздушными колебаниями, но звук также прекрасно может распространяться в воде и по земле, чего нельзя сказать о вакууме – в нем звук не распространяется. Оцифровка звука – технология осуществления замеров амплитуды звукового сигнала с определенным временным шагом и последующей записи полученных значений в численном виде. Другое название оцифровки звука – аналогово-цифровое преобразование звука.

Процедура оцифровки звука подразумевает два этапа (рис. 1):

- процесс дискретизации (осуществление выборки) сигнала по времени

- процесс квантования по амплитуде (по уровню).

В 1933 году Владимиром Котельниковым была предложена и доказана теорема, которая является фундаментальным утверждением в области цифровой обработки сигналов. Она связывает дискретные и непрерывные сигналы и формулируется следующим образом.

Непрерывный сигнал $s(t)$, ограниченный по спектру частотой f_B (или ω_B), полностью определяется совокупностью мгновенных значений

(отсчетов) $s(t_k)$ в моменты времени $t_k = k\Delta t$, отстоящие друг от друга на интервал времени $\Delta t = \frac{1}{2f_B} = \frac{\pi}{\omega_B}$.

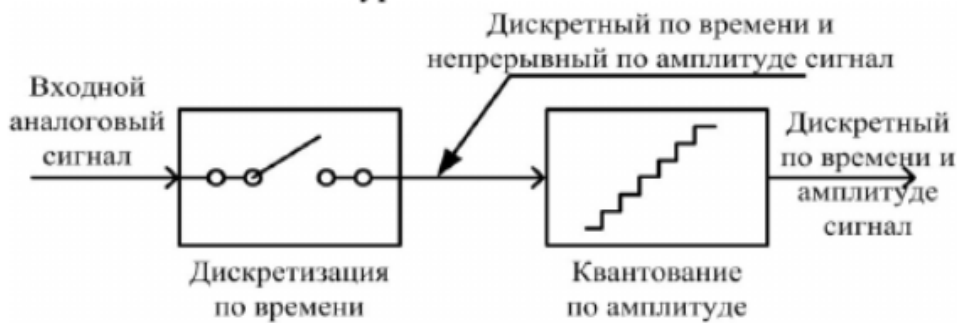


Рис. 1. Схема преобразования аналогового сигнала в цифровой

По сути, теорема Котельникова устанавливает принципиальную возможность представления непрерывного сигнала последовательностью его мгновенных значений. Такую операцию иногда называют импульсным преобразованием непрерывного сигнала. Такое преобразование лежит в основе импульсных методов передачи сообщений в радиотехнических системах. Более того, дискретизация непрерывных сигналов в соответствии с теоремой Котельникова является промежуточной операцией при формировании цифровых сигналов, которые в настоящее время нашли самое широкое распространение как в радиотехнических системах передачи сообщений, так и радиоэлектронных системах обработки, отображения и регистрации информации, и во многих других областях.

Формирование последовательности отсчетов непрерывного сигнала, которая представляет собой дискретный сигнал, т.к. значение любого отсчета $s(k\Delta t)$ сохраняется неизменным в течение интервала времени Δt , осуществляется при помощи импульсного модулятора.

Простейший вариант импульсного модулятора представляет собой перемножитель (рис. 2), на один вход которого подается непрерывный сигнал $s(t)$, а на второй – последовательность

$$hg(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - k\Delta t)$$

коротких единичных импульсов, следующих друг за другом с периодом Δt (рис. 2, а). Тогда на выходе перемножителя будет иметь место последовательность коротких импульсов

$$Sg(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - k\Delta t),$$

амплитуды которых равны $s(k\Delta t)$, т.е. соответствуют мгновенным значениям сигнала $s(t)$, отсчитанным в момент времени $t_k = k\Delta t$.

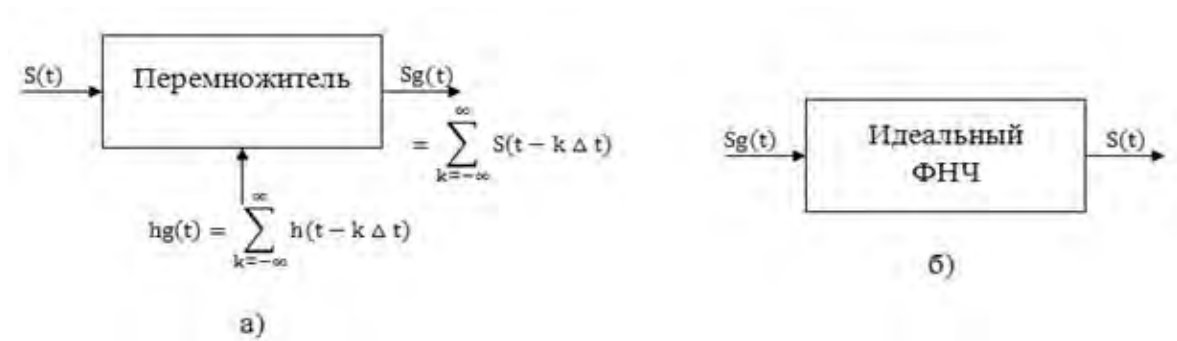


Рис. 2. Простейший импульсный модулятор

Процесс формирования последовательности отсчетов называется дискретизацией непрерывного сигнала.

Восстановление непрерывного сигнала осуществляется путем подачи дискретного сигнала $Sg(t)$ на идеальный фильтр нижних частот. Отклик фильтра на каждый отсчет определяется выражением

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi f_B(t - k\Delta t)}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - k\Delta t)}{\omega_B(t - k\Delta t)}.$$

При этом, в момент времени $t_k = k\Delta t$, значение отклика определяется только k -м отсчетом дискретного сигнала; отклик на остальные отсчеты равен нулю. Суммируясь, эти отклики дают на выходе ФНЧ исходный сигнал $s(t)$.

Блок оцифрованной таким образом информации можно записать в файл без изменений, то есть последовательностью чисел – значений амплитуды. В этом случае существуют два способа хранения информации:

1) Pulse Code Modulation (PCM – импульсно-кодовая модуляция) – способ цифрового кодирования сигнала при помощи записи абсолютных значений амплитуд.

2) Adaptive Differential Modulation (ADPCM – адаптивная дифференциальная импульсно-кодовая модуляция) – запись значений сигнала не в абсолютных, а в относительных изменениях амплитуд (приращениях).

В случае импульсно-кодовой модуляции (PCM) аналоговый сигнал кодируется сериями импульсов в дискретном потоке. Такая модуляция является основным видом преобразования аналогового сигнала в цифровой и обратно, осуществляемого устройствами АЦП и ЦАП.

Аналоговые сигналы на входе цифровой системы передачи непрерывно принимают произвольные значения в пределах заданного (известного) амплитудного диапазона. Используя n -разрядные кодовые

группы, можно зафиксировать и передать информацию не более, чем о r^n различных значениях сигнала. Поэтому дискретный сигнал должен быть квантован по уровню для передачи, а затем только значение этого уровня может быть передано в виде кода. Таким образом, при ИКМ осуществляются три вида преобразований: дискретизация во времени исходного сигнала, квантование амплитуд дискретных отсчетов и кодирование, т.е. собственно формирование кодовых групп. Аналоговые сигналы на входе цифровой системы передачи непрерывно принимают произвольные значения в пределах заданного (известного) амплитудного диапазона. Используя n -разрядные кодовые группы, можно зафиксировать и передать информацию не более, чем о r^n различных значениях сигнала. Поэтому дискретный сигнал должен быть квантован по уровню для передачи, а затем только значение этого уровня может быть передано в виде кода. Таким образом, при ИКМ осуществляются три вида преобразований: дискретизация во времени исходного сигнала, квантование амплитуд дискретных отсчетов и кодирование, т.е. собственно формирование кодовых групп. Диаграмма всех этапов кодирования представлена на рис. 3.

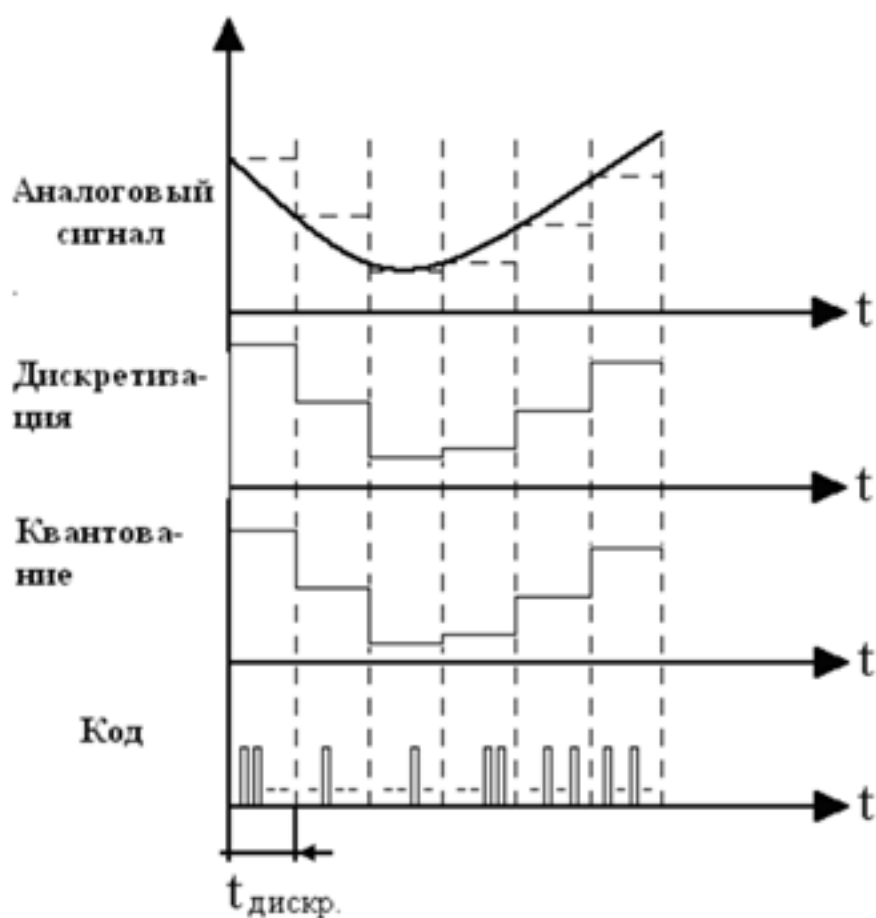


Рис. 3. Этапы импульсно-кодовой модуляции

Адаптивная дифференциальная импульсно-кодовая модуляция (ADPCM G.726 от МККТТ) – это стандарт, кодирующий выборку за выборкой, предсказывая значение каждой выборки из восстановленной речи предшествующих выборок, с использованием адаптивного предсказателя с обратной связью. Он принимает качественную речь, преобразованную посредством 8-битового линейного преобразования с использованием А- или -закона со скоростью 64 Кбит/с, и выдает сжатую речь со скоростью 16, 24, 32 и 40 Кбит/с. Кодер применяет декодер в контуре обратной связи для анализа и модификации параметров алгоритма с целью минимизации ошибки восстановления. Предсказатель использует фильтр шестого порядка для моделирования нулей и фильтр второго порядка – для моделирования полюсов источника входного сигнала. Блочная диаграмма кодера изображена на рисунке 4.



Рис. 4. Речевой кодек ADPCM (G.726)

Стандарт МККТТ G.722 является стандартом кодирования широкополосной речи. Широкополосное сжатие приводит к значительному улучшению качества телефонной речи, которое приближается к качеству речи при радиовещании и в музыкальных сигналах. Данный кодек использует дополнительные фильтры нижних и верхних частот для отделения входной полосы частот в 7 кГц, после чего речь дискретизируется с частотой 16 кГц в более высокую и более низкую подполосы, каждая из которых выбирается с частотой 8 кГц. Функции обоих фильтров и операция повторной дискретизации реализованы в цифровом фильтре, известном как квадратурный зеркальный фильтр (quadrature mirror filter). Независимые кодеры ADPCM обрабатывают временные ряды сокращенных полос частот от двух фильтров и выдают скорости в 48 Кбит/с и 16 Кбит/с, соответственно, на выходе низкой и высокой полос.

В рамках данной бакалаврской работы рассматривался весь процесс цифрового кодирования аудио данных. Реализация алгоритма производилась в математической среде Maple 17. В качестве модельной задачи был рассмотрен звуковой сигнал, представленный в виде разложения по косинусу:

$$\frac{1}{2}\cos(4\pi t) + \frac{1}{4}\cos(7\pi t) + \frac{1}{4}\cos(19\pi t)$$

Список литературы

1. Котельников В. А. О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук. 2006. Т. 176, № 7. С. 762–770.
2. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход : пер. с англ. М. : Вильямс, 2017. 992 с.
3. Биккенин Р. Р., Чесноков М. Н. Теория электрической связи. М. : Издательский центр Академия, 2010. 329 с.
4. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М. : Мир, 1989. 448 с.
5. Ковалгин Ю. А., Вологдин Э. И. Цифровое кодирование звуковых сигналов MPEG Dolby AC-3. СПб. : Корона-Принт, 2013. 240 с.

About identification of one model of nonstationary filtration

Rahima Q. Jalilova

Azerbaijan Pedagogical University, Baku, Azerbaijan
qazvinova.elmira@mail.ru

Abstract. On the example of one problem, using the group-theoretic group theory, Ly's theory, the influence of unbalance effects on oil recovery in layered seams is investigated.

Keywords: differensial equations, oil recovery, group analysis, unbalance effects, relaxation parameters

Об идентификации одной модели нестационарной фильтрации

Рахима Курбановна Джалилова

Азербайджанский государственный педагогический
университет, г. Баку, Азербайджан
qazvinova.elmira@mail.ru

Аннотация. На примере одной задачи с помощью теоретико-группового метода – теории Ли исследуется влияние неравновесных эффектов на нефтеотдачу в слоистых пластах.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, нефтеотдача, групповые анализы, неравновесные эффекты, релаксационные параметры

Development of methods mathematics modeling for productioning oil-field ,growing of hydrodynamic models of layer ,so creating of system automation project for working allowed the next step in the direction of determining and growing of calculate optimal dynamic of extracting oil. For the production of oilfield there are the objective conditions of the creating different dynamic for extracting oil which consisting in being reserves of layer energy for intensification extracting oil in the first period of the production and so for the tehcnical extent of resources artificial influence on the oil layers and racing from the layer.The main factors ,which determining the dynamic and the levels of changing oil and liquid can divorce on geological, which characterize the collecor qualiies of layers and filling their fluids and the tehnology conditions of the production oilfields.

In this case the first group of factors in traditional flood is unregular:pervisity,porosity,viscosity of oil, configuration,mass expences and porosity of deposit,the first group is concerning to the manager parametres of the production oilfields:geometry and porosity of tuile wells,the system of

placing of extract and supercharge wells, inflexions of pressure and etc. Different dynamic of extraction oil and corresponding tempo of the selection set in motion to different tehnico-economics indexes of the production. The dynamic of extracting oil is the unlinear on the stages of the intensive drilling of deposits and increasing of extraction oil, stabilization of extraction oil with influences on the layer, degradation of extraction oil ,emaciation of reserves oil and energy resources of layer.

Submit for concideration the mathematics model of two-phases in the pit zone:

$$\operatorname{div}(\mathbf{x}) \nabla p - c(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial t} + \xi - \eta f = 0 \quad (1)$$

$$a(\mathbf{x}) = k_i(\rho) / \mu_i \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{x} \in \Omega$$

$$c(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) (m_0 \beta_{\text{жс}} + \beta_n) \quad p_{t=0} = p^0$$

$$\vec{k} = (k_1, k_2), \quad \vec{f} = (f_1, f_2) \quad f_i = k_i / (\mu_i a)$$

μ_i – viscosity; k_i – relative pervious; $i=1$ apply to oil; $i=2$ to liquid; η – intensive of selection; P – pressure; m – porosity; x_1, x_2 – coordinates of plane, t – time; J – oil recovery; V_0 – primary volume of oil in the layer; $\xi(\mathbf{x}, t)$ – intensive of rolling up oil.

$$\int_{\Omega} (\xi - \eta) d\mathbf{x} = 0 \quad \eta \geq 0 \quad (2)$$

$$J = \int_0^T \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \eta f_1 d\mathbf{x} dt \quad (3)$$

T – time of production

Problem consist in definition of manager influences $\xi(\mathbf{x}, t)$, $\eta(\mathbf{x}, t)$, which allow to get maximum нефтеотдача

$$\int_0^T \int_{\Omega} \eta d\mathbf{x} dt = Q_0$$

where Q_0 -definite value

Assign the definite classes of decisions, finding which simpler than finding the general decision, we use theory Ly for it.

Construction the infinitesimal operator for the mission in the following view:

$$\mathbf{x} = \omega^1(x_1, x_2, t, p) \frac{\partial}{\partial x_1} + \omega^2(x_1, x_2, t, p) \frac{\partial}{\partial x_2} + \omega^3(x_1, x_2, t, p) \frac{\partial}{\partial t} +$$

$$\begin{aligned}
& +\omega^4(x_1, x_2, t, p) \frac{\partial}{\partial p} + v_1 \frac{\partial}{\partial p_{x_1}} + v_2 \frac{\partial}{\partial p_{x_2}} + v_3 \frac{\partial}{\partial p_t} + v_{11} \frac{\partial}{\partial p_{x_1 x_1}} + \\
& + v_{12} \frac{\partial}{\partial p_{x_1 x_2}} + v_{22} \frac{\partial}{\partial p_{x_2 x_2}} + v_{13} \frac{\partial}{\partial p_{x_1 t}} + v_{23} \frac{\partial}{\partial p_{x_2 t}} + v_{33} \frac{\partial}{\partial p_{tt}} \quad (4)
\end{aligned}$$

In result of the action of the operator we get the next differential equation:

$$\begin{aligned}
& a(x_1, x_2)(v_{11} + v_{22}) + P_{x_1 x_1} a_{x_1}(x_1, x_2) \omega^1 + P_{x_2 x_2} a_{x_2}(x_1, x_2) \omega^2 + \\
& + P_{x_1} a_{x_1 x_1}(x_1, x_2) \omega^1 + P_{x_2} a_{x_2 x_2}(x_1, x_2) \omega^2 + a_{x_1}(x_1, x_2) v_1 + \\
& + a_{x_2}(x_1, x_2) v_2 - c(x_1, x_2) v_3 - P_t c_{x_1}(x_1, x_2) \omega^1 - P_t c_{x_2}(x_1, x_2) \omega^2 = Q_t \omega^3. \quad (5)
\end{aligned}$$

where v_{11} и v_{22} express in full differential D with formulas:

$$\begin{aligned}
v_{11} &= D_{x_1}(v_1) - p_{tx_{11}} D_{x_1}(\omega^3) - P_{x_1 x_1} D_{x_1}(\omega^1) - P_{x_2 x_1} D_{x_1}(\omega^2) \\
v_{22} &= D_{x_2}(v_2) - p_{tx_2} D_{x_2}(\omega^3) - P_{x_2 x_1} D_{x_2}(\omega^1) - P_{x_2 x_2} D_{x_2}(\omega^2)
\end{aligned}$$

In order to define a view function $\omega^1(x_1, x_2, t, p)$, $\omega^2(x_1, x_2, t, p)$, $\omega^4(x_1, x_2, t, p)$ it is necessary

with reckoning expressions for $v_{11}, v_{22}, v_1, v_2, v_3$ to split the definite equation, which is differential concerning of unknown co-ordinates $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$. It is necessary to mark if do not use with the infinitesimal create of invariancy differential equation and the formula substitute into the equation, in this case receiving system will be unlinear, if the first equation is unlinear, and, mission of finding group will seem very complex and unwieldy. The definition equations always unlinear it means the application of the infinitesimal creates of invariancy actually do unlinear the mission of finding group of the transformation with permissible system of the differential equations.

Splitting the equation (5) concerning “free” co-ordinate P and its derivatives, we get:

$$\left. \begin{aligned}
& a\omega_p^4 - 2a\omega_{x_1}^1 + a_{x_1} \omega^1 = 0, \omega_p^1 = 0, \omega_p^3 = 0, \omega_{x_2}^3 = 0 \\
& a\omega_p^4 - 2a\omega_{x_2}^2 + a_{x_2} \omega^2 = 0, \omega_p^2 = 0, \omega_{x_1}^3 = 0, \omega_{pp}^4 = 0
\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
& c\omega_p^4 + c\omega_t^3 - \omega^1 c_{x_1} - \omega^2 c_{x_2} = 0 \\
& -c\omega_t^4 + a\omega_{x_1 x_1}^4 + a\omega_{x_2 x_2}^4 + a_{x_1} \omega_{x_1}^4 + a_{x_2} \omega_{x_2}^4 - \omega^3 Q + \eta_{x_1} f + \xi_{x_2} + \xi_{x_2} f = 0
\end{aligned} \right\} \xi_{x_1}$$

$$\left. \begin{aligned} c\omega_t^1 + 2a\omega_{x_1 p}^4 - a\omega_{x_1 x_1}^1 - a\omega_{x_2 x_2}^1 + a_{x_1 x_1} \omega^1 - a_{x_1} \omega_{x_1}^1 - a_{x_2} \omega_{x_2}^1 + a_{x_1} \omega_p^4 &= 0 \\ c\omega_t^2 + 2a\omega_{x_2 p}^4 - a\omega_{x_2 x_2}^2 - a\omega_{x_1 x_1}^2 + a_{x_2 x_2} \omega^2 - a_{x_1} \omega_{x_1}^2 - a_{x_2} \omega_{x_2}^2 + a_{x_2} \omega_p^4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

It is possible to decide the mission of the group classification concerning element $\eta = \eta(x)$. Proposition about the arbitrary $\eta = \eta(x)$ and its derivative is made in receiving definition equations, that assists to additional splitting system (6) and give us the definition equations of nucleus of main groups.

$$\left. \begin{aligned} \xi \omega_{px_1}^4 + \xi \omega_{x_1 x_1}^1 + c\omega_t^1 - \xi \omega_{x_2 x_2}^1 - \xi_{x_2} \omega_{x_2}^1 &= 0 \\ \eta \omega_{px_2}^4 + \eta \omega_{x_2 x_2}^2 + c\omega_t^2 - \eta \omega_{x_1 x_1}^2 - \eta_{x_2} \omega_{x_1}^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

After unheavy transformations we get the following treatments:

$$\omega_p^4 = \omega_t^3; \omega_{x_1 x_1}^1 = 0; \omega_{x_2 x_2}^2 = 0$$

The following equations appear in view of definite receiving system, which keep only $\eta(x)$. These equations are classifications:

$$\omega^2 = \left(\frac{\eta}{\eta_{x_2}} \right) (2\omega_{x_2}^2 - \omega_t^3); \omega^1 = \left(\frac{\eta}{\eta_{x_1}} \right) (2\omega_{x_1}^1 - \omega_t^3). \quad (7)$$

We get some expanse of vector fields of tangent to groups for each decision of classification equations. We see the addition base of the main expanse till the base of expanse $L((\eta))$.

The main group is generated with transformations, which belong to 5 groups:

$$X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + t \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}, X_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_4 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial p}$$

It is possible to get the invariancy decision for each of these. It is interesting the chance of submitting the operators X_2 и X_3 . For X_2 corresponds the invariancy decision $p = p(x_2, t)$, putting up in (1) we get:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\eta(x_2) \frac{\partial p}{\partial x_2} \right] - c \frac{\partial p}{\partial t} = Q(t)$$

The receiving equation represents the single-measure equation of heat-conducting with variable coefficient and source, so the applying of theory Ly gave us the splitting of the first equation in directions x_1 and x_2 .

When we use operator X_3 , we get:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\eta(x_1) \frac{\partial p}{\partial x_1} \right] - c \frac{\partial p}{\partial t} = Q(t)$$

We can begin the classification. The main base is found, the group of equivalent of equation is looked for in the class of equations, joining with condition, so as arbitrary η depended on from x_2 (or from x_1).

When we difference the first equation in (7) on x_2 , but the second on x_1 , we get the following classification equation:

$$\left(\frac{\eta}{\eta_{x_2}} \right)_{x_2 x_2} = 0 \quad \left(\frac{\eta}{\eta_{x_1}} \right)_{x_1 x_1} = 0$$

The decisions is written in that view :

$$\frac{\eta}{\eta_{x_2}} = \frac{x_2}{r_1} + r_2; \quad \frac{\eta}{\eta_{x_1}} = \frac{x_1}{r_1'} + r_2', \quad \text{where } r_1, r_2, r_1', r_2' - \text{const}$$

The linear combination of invariant decisions of the main base of the group transformations are the invariancy decision too. Then the general decision of the classification system is noted in following view:

$$\eta(x) = c_1 x_1^\alpha + c_2 x_2^\beta, \quad \text{where } \alpha = \frac{1}{r_1}, \beta = \frac{1}{r_1'}$$

In that case we see the widening of the main group on vectors: $(\alpha x_1, \beta x_2, 0, 2p)$

The cultivate method of synthesis and approach of the group analysis of the differensial equations and the counting analysis reveals the good possibilities and allows to reseach numerous unlinear appearances, and the management influence, which influence on the productivity of layer.

References

1. Virnovski G. A., Levitan E. I. About identification of two-measure model of current of homogeneous liquid in porosity space // Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1990. Vol. 30, № 5. P. 727–735.
2. Ovsannikov L. V. The group analysis of differencial equations. M., 1978.
3. Jalilova R. G., Kasumov S. Yu., Shirinov K. F. The application of theory Ly to reseaching of single class for prosesses of filtration // News AN Azerb. Seriya f.t..and m.n. 1995. № 5–6.

Противодействие угрозе атак Маршалко с целью повышения стойкости биометрико-нейросетевой защиты личных криптографических ключей

Игорь Алексеевич Крохин

Пензенский государственный технологический университет, г. Пенза, Россия
Kr.ig.sv08@gmail.com

Аннотация. Рассматривается атака Г. Б. Маршалко на нейронные сети, обученные по стандарту ГОСТ Р 52633, для систем аутентификации пользователя с целью снижения вычислительных затрат на подбор ключа нейросетевого преобразователя «биометрия – код». Приведены варианты противодействия этим атакам.

Ключевые слова: биометрия, ГОСТ Р 52633, нейронные сети, преобразователь «биометрия – код», защита личных криптографических ключей

Countering the marshalko attack threat to increase the strength of biometric-neural network protection of personal cryptographic keys

Igor' A. Krokhin

Penza State Technological University, Penza, Russia
Kr.ig.sv08@gmail.com

Abstract. G.B. Marshalko attack is being considered on neural networks trained according to the GOST R52633 standard for user authentication systems in order to reduce the computational costs for selecting the key of the biometrics code neural network converter. Options for countering these attacks are given.

Keywords: biometrics, GOST R 52633, neural networks, biometrics – code converter, protection of personal cryptographic keys

Введение

В настоящее время активно внедряются технологии и разработки по использованию биометрических параметров для защиты персональных криптографических ключей при авторизации в информационных системах. Явным преимуществом технологии, является отсутствие необходимости для конечного пользователя, запоминать длинный случайный пароль, достаточно предоставить свою биометрию.

Алгоритм обучения нейронной сети по ГОСТ Р 526733.5

Рассмотрим алгоритм обучения нейронной сети биометрической идентификации по ГОСТ Р 52633.5[1]:

Для $j = 1, \dots, \left\lceil \frac{N_0}{n} \right\rceil$ и $i = 1, \dots, n$, где N_0 – число входов нейронной сети, n – число входов каждого из нейронов.

Рассчитываются весовые коэффициенты по формуле:

$$\mu_i^j = \frac{(-1)^{b_j} * (\overline{v_{jn+i}^1} - \overline{v_{jn+i}^0})}{a^2 * \sqrt{S^2(v_{jn+i}^1)} + \sqrt{S^2(v_{jn+i}^0)}},$$

где $\overline{v_t^c}$ – выборочное среднее, $S^2(v_t^c)$ – дисперсия t -го биометрического параметра $t = 1, \dots, v_{N_0}$ для образов «Свой» ($c = 0$) и «Чужой» ($c = 1$).

Таблицу соответствий заполняют по формуле:

$$d_i^j = jn + i$$

Для $j = \left\lceil \frac{N_0}{n} \right\rceil + 1, \dots, N_1$ и $i = 1, \dots, n$, где N_1 – число нейронов в сети.

Рассчитываются весовые коэффициенты по формуле:

$$\mu_i^j = \frac{(-1)^{b_j} * (\overline{v_\tau^1} - \overline{v_\tau^0})}{a^2 * \sqrt{S^2(v_\tau^1)} + \sqrt{S^2(v_\tau^0)}},$$

где τ – псевдослучайная выбранная координата вектора биометрических параметров.

Для $j = 1, \dots, N_1$. Вычисляют значение порогового элемента нейрона по формуле:

$$\mu_0^j = \text{norm}(\mu_1^j, \dots, \mu_n^j)$$

По стандартизированному алгоритму обучения нейронной сети ГОСТ Р 52633.5 [1] заполнение таблиц выходных связей осуществляется от генератора псевдослучайных чисел.

Атака Маршалко

Но обученные по ГОСТ Р52633 [1] нейронные сети, является уязвимыми для атак Маршалко[2], которые строятся на наблюдении большого числа выходов у незащищенных нейронов и поиска общих связей, схема нахождения представлена на рисунке 1.

Поскольку нейронная сеть описывается системой линейных неравенств, сложность нахождения личного криптографического ключа пользователя по известным таблицам весовых коэффициентов нейронов

эквивалентна сложности нахождения одного решения соответствующей системы линейных неравенств.

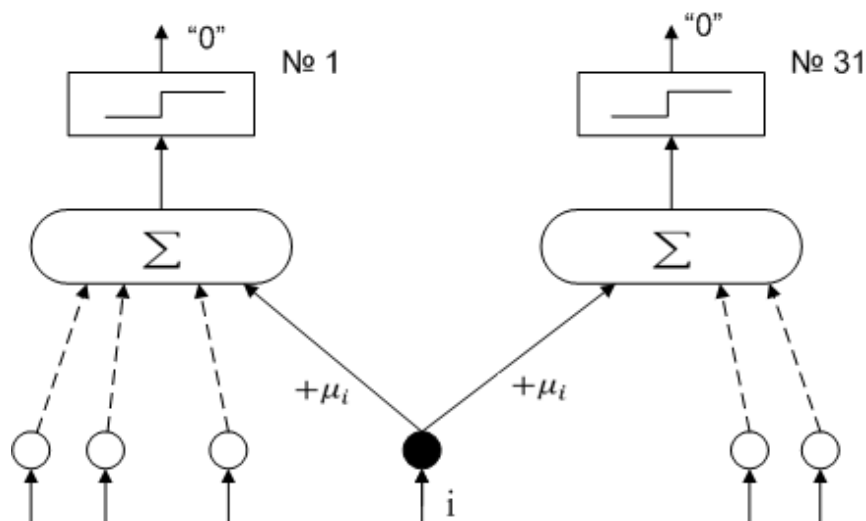


Рис. 1. Схема нахождения общих связей нейронов

Рассмотрим несколько методов по противодействию атак, с целью повышения стойкости биометрической защиты криптографических ключей.

Использование квадратичных нейронов

У линейных нейронов из-за вероятной угрозы атак Маршалко должны отсутствовать общие входные связи. Соответственно криптографически защищенная нейросеть, имеющая нейроны с 16 входами, анализирующая N биометрических параметров должна состоять из $N/16$ нейронов.

Проведенные исследования [3, 4] показывают, что квадратичный нейрон с 4 входами имеет производительность, сопоставимую с классическим нейроном, обученным по ГОСТ Р 52633.5, имеющим 16 входов [5]. Это позволит создать на базе квадратичных нейронов нейросетевые ПБК, с большим бинарным кодом на выходе, чем классический нейросетевой ПБК.

Так как для защиты от атаки Маршалко необходимо отсутствие общих связей нейронов, то длина ключа на выходе такого нейросетевого преобразователя «биометрия – код» будет выше примерно в 4 раза.

Таблицы связей и таблицы параметров квадратичных нейронов могут быть защищены шифрованием по технической спецификации при незначительных модификациях основного документа¹.

¹ Техническая спецификация «Системы обработки информации. Криптографическая защита информации. Защита нейросетевых биометрических контейнеров с использованием криптографических алгоритмов» принята 19.11.2020 на XXV заседании технического комитета № 26.

Маскирование весовых коэффициентов искусственных нейронов

Возможное программное решение противодействия атаке Маршалко, является итерационное дообучение нейронной сети биометрической идентификации с целью маскирования значимых весовых коэффициентов. Если увеличить количество весовых коэффициентов нейрона в два раза, (в случае использования классического нейрона, необходимо увеличить с 16 до 32), тогда у атакующего возникнут сложности при попытке идентифицировать общие связи значимых нейронов. Схема нейрона с использованием маскирования весовых коэффициентов представлена на рисунке 2.

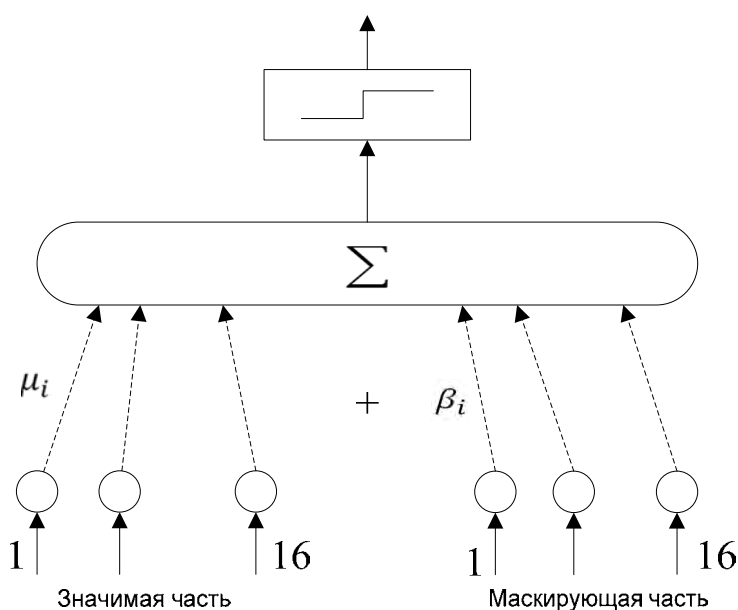


Рис. 2. Схема нейрона с использованием маскирующей части

Используя итерационное дообучение нейронной сети биометрической идентификации с целью маскирования значимых весовых коэффициентов, возможно, противодействовать атакам Маршалко. Сложность поиска значимых общих связей нейрона увеличивается сложность, из-за наличия маскирующей части нейрона, задача которой является запутывать атакующего.

Заключение

Использование предложенных мер по противодействию атаке Маршалко, может повысить стойкость биометрической защиты личных криптографических ключей при использовании нейронных сетей по ГОСТ Р 52633.5.

При использовании квадратичных нейронов в задаче верификации образов с использованием 416 признаков, длина кода составит 104 бита, вместо 26 бит, что в 4 раза выше.

При использовании маскирующей функции во время обучения персептронов по ГОСТ Р 52633 сложность поиска значимых коэффициентов увеличивается в 2 раза.

Список литературы

1. ГОСТ Р 52633.5–2011. Защита информации. Техника защиты информации. Автоматическое обучение нейросетевых преобразователей биометрического доступа. М., 2011.

2. Marshalko G. B. On the security of a neural network-based biometric authentication scheme // Математические вопросы криптографии. 2014. Т. 5, № 2. С. 87–98.

3. Крохин И. А. Расчет вероятностей повторения общих связей для нейронов при случайном выборе из биометрических параметров для данных сопоставимого качества // Современные методы и средства обработки пространственно-временных сигналов : сб. ст. XIX Всерос. науч.-техн. конф., посвящ. 60-летию первого полета в космос Юрия Алексеевича Гагарина, Пенза (13–14 мая 2021 г.) / под ред. И. И. Сальникова. Пенза : Приволжский Дом знаний, 2021. С. 106–110.

4. Иванов А. И., Крохин И. А. Таблица вероятности появления разных стартовых условий для атак Маршалко на нейроны с общими входными связями // Состояние и перспективы развития современной науки по направлению «Техническое зрение и распознавание образов» : сб. ст. III науч.-техн. конф. (Анапа, 18 марта 2021 г.). Анапа : Федеральное государственное автономное учреждение «Военный инновационный технополис «ЭРА», 2021. С. 171–172.

Восстановление параметров неоднородности тела в полубесконечном прямоугольном волноводе

Марина Александровна Москалева

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

m.a.moskaleva1@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена трехмерная векторная задача дифракции, заключающаяся в определении параметров неоднородности тела в полубесконечном прямоугольном волноводе. Численный метод решения исследуемой задачи основан на сведении обратной задачи к объемному сингулярному интегральному уравнению и дополнительной процедуре пересчета диэлектрической проницаемости тела. Получены численные результаты решения задачи дифракции восстановления диэлектрической проницаемости тела. Также был использован параллельный алгоритм.

Ключевые слова: краевая задача, обратная задача дифракции, тензор диэлектрической проницаемости, тензорная функция Грина, интегродифференциальное уравнение

Финансирование: работа поддержана грантом Президента Российской Федерации № МК-2965.2021.1.1.

Recovery of parameters of inhomogeneity of a body in a semi-infinite rectangular waveguide

Marina Aleksandrovna Moskaleva

Penza State University, Penza, Russia

m.a.moskaleva1@gmail.com

Abstract. The vector three-dimensional inverse problem of diffraction is considered. This problem consists in determining the parameters of inhomogeneity of a body located in a semi-infinite rectangular waveguide. The numerical method for solving the problem under study is based on reducing the inverse problem to a volumetric singular integral equation and an additional procedure for recalculating the body permittivity. The numerical results are presented. We used a parallel algorithm.

Keywords: boundary value problem, inverse problem of diffraction, permittivity tensor, tensor Green's function, integrodifferential equation.

Acknowledgments: this study is supported by grant of the President of the Russian Federation № МК-2965.2021.1.1.

Введение

Статья посвящена трехмерной векторной задаче электродинамике, заключающейся в восстановлении параметров неоднородности тел,

имеющих композитную структуру. Рассматриваемое тело находится в полубесконечном прямоугольном волноводе, при этом источником падающего поля является ток, локализованный вне тела. Параметры неоднородности тела восстанавливаются неинвазивными методами, с использованием измерений величины поля в точках наблюдения, находящихся вне тела [1,2].

Предложенный метод может быть эффективно использован для конструирования композитов и наноструктур, а также для их исследования методом неразрушающего контроля.

Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Пусть тело Q с кусочно-гладкой границей ∂Q расположено в прямоугольном полубесконечном волноводе

$$P := \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < +\infty\},$$

границы этого волновода ∂P являются идеально проводящими [3]. Тело Q характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной ограниченной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$, такой что $\varepsilon \in L_\infty(Q)$ и $\varepsilon^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ возбуждается в волноводе сторонним полем с временной зависимостью вида $e^{-i\omega t}$, где ω - круговая частота. Источник стороннего поля – электрический ток $j_E^0 \in L_{2,\text{loc}}(P)$.

Будем искать «слабые» (обобщенные) решения уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E} + j_E^0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \quad (1)$$

Для $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ должны выполняться граничные условия на стенках полубесконечного волновода:

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \quad \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0, \quad (2)$$

и условия излучения на бесконечности

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{pmatrix} + \sum_p R_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(1)}|x_3|) \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \varepsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ + \sum_p Q_p^{(\pm)} \exp(i\gamma_p^{(2)}|x_3|) \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \Psi_p) \times \mathbf{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)} \Psi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \Psi_p \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Pi = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ - прямоугольник с введенным на нем двумерным оператором Лапласа $-\Delta$, $\lambda_p^{(1)}$, $\Pi(x_1, x_2)$ и $\lambda_p^{(2)}$,

$\psi(x_1, x_2)$ - полная система собственных значений и ортогональных нормированных в $L_2(P)$ собственных функций оператора Лапласа с условиями Дирихле и Неймана на границе Π соответственно, $\gamma_p^{(j)} = \sqrt{k_0^2 - \lambda_p^{(j)}}$, $\text{Im} \gamma_p^{(j)} \geq 0$, $k \gamma_p^{(j)}$, $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, где k - волновое число свободного пространства и $\nabla_2 \equiv \mathbf{e}_1 \partial / \partial x_1 + \mathbf{e}_2 \partial / \partial x_2$ [4].

Мы также будем полагать, что $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ это известное поле (падающая волна), являющееся решением уравнений (1) в отсутствии неоднородного тела Q .

Решения $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ уравнения (1) могут быть выражены в аналитической форме через $\mathbf{j}_E^0$ с помощью диагонального тензора Грина [4], компоненты которого имеют вид

$$\begin{aligned} G_E^1 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|) + \exp(-\gamma_{nm}|x_3 + y_3|)}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0n})} \times \\ &\quad \times \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^2 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|) + \exp(-\gamma_{nm}|x_3 + y_3|)}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0n})} \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2, \\ G_E^3 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_{nm}|x_3 - y_3|) + \exp(-\gamma_{nm}|x_3 + y_3|)}{\gamma_{nm}(1 + \delta_{0n})} \times \\ &\quad \times \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\text{Im} \gamma_{nm} \geq 0$.

Подробная постановка задачи (1)-(3) и получение отвечающего ей интегро-дифференциального уравнения (4) представлена в [4, 5].

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \chi(y) - I \mathbf{E}(y) dy + \\ &+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \chi(y) \mathbf{E}(y) dy, \text{ где } \chi(y) = \frac{\epsilon(y)}{\epsilon} - I, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (4)$$

Обратная задача дифракции

Обратная задача состоит в восстановлении параметров неоднородности тела Q в волноводе P с помощью измерения рассеянного поля вне тела [6]. Рассеянное поле измеряется в так называемых точках наблюдения x_c , которые находятся на нескольких параллельных поверхностях S , расположенных параллельно грани тела на некотором расстоянии.

Для этого решаем уравнение (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_c) = \mathbf{E}^0(x_c) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \chi(y) \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \chi(y) \mathbf{E}(y) dy, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{E}_0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \exp\left(-i \gamma_1^{(2)} x_3\right)$ - падающее поле, относительно неизвестной функции $\mathbf{J}(y) = \chi(y) \mathbf{E}(y)$.

Первый шаг предложенного метода заключается в решении интегрального уравнения первого рода (6)

$$\frac{\mathbf{J}(x_c)}{\chi(y)} - \mathbf{E}^0(x_c) = k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad (6)$$

при этом используются значения поля в точках наблюдения, полученные ранее.

Далее после того, как мы нашли $\mathbf{J}(x)$, переходим ко второму шагу метода, а именно определяем диэлектрическую проницаемость тела в каждой из подобластей тела, решая уравнение (7) относительно $\chi(y)$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x)}{\chi(y)} - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Параллельный алгоритм и хранение матричных коэффициентов

Будем предполагать, что тело Q - куб. Тогда общее количество матричных элементов $N = 9m^6$, где m количество элементарных ячеек расчетной сетки вдоль одной координатной оси.

Объем памяти вычислений, необходимый для хранения матричных коэффициентов, зависит от размера сетки вычислений. Так, при $m = 4$,

необходимый объем памяти для хранения коэффициентов равен 0.5625Mb, при $m=8$ - 36Mb, при $m=16$ - 2304Mb, при $m=32$ - 147456Mb.

Для оптимизации расчетов можно использовать технологию MPI [7]. На каждом вычислительном многопроцессорном комплексе был рассчитан один или несколько блоков матричных элементов.

Количество коэффициентов на одном процессоре определяется как

$$C = \begin{cases} [N / p] + 1, & p < \{N / p\}, \\ [N / p], & p \geq \{N / p\}, \end{cases}$$

где N - общее число коэффициентов, $\{N / p\}$ - остаток от целочисленного деления, $[N / p]$ - целая часть деления, p номер процессора.

Мы использовали 256 процессоров для вычисления коэффициентов матрицы для $m=16$ и $n=50$, где n - число слагаемых в компонентах тензора Грина. Время расчета составило около 3 часов. Общее количество элементов матрицы составляет 12288×12288 . Для ПК время расчета составляет около 120 часов.

Ниже показаны результаты увеличения скорости для разного количества ядер:

- при $p=16$ вычислительная скорость увеличивается примерно в 9 раз;
- при $p=64$ вычислительная скорость увеличивается примерно в 27 раз;
- при $p=256$ вычислительная скорость увеличивается примерно в 40 раз.

Параллельный алгоритм довольно прост в использовании и позволяет сократить время расчета в 40 раз.

Заключение

В статье рассмотрена трехмерная векторная задачи дифракции, которая состоит в определении параметров неоднородности тела в полубесконечном прямоугольном волноводе и построен численный метод ее решения. Данный метод реализуется в два шага: сначала решается интегрального уравнения первого рода, отвечающее обратной задаче, а затем - пересчитывается функция диэлектрической проницаемости через ток поляризации. Предложенный метод не требует начального приближения, а также позволяет восстановить большое число неоднородностей.

Список литературы

1. Tao Pan, Guo-Ding Xu, Tao-Cheng Zang, Lei Gao. Study of a slab waveguide loaded with dispersive anisotropic // Applied Physics A. 2009. Vol. 95. P. 367–372.

2. Usanov D., Skripal, A., Romanov A. Complex permittivity of composites based on dielectric matrices with carbon nanotubes // Technical Physics. 2011. Vol. 56, № 1. P. 102–106.

3. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : Изд. предприятие ред. журн. «Радиотехника», 1996. 176 с.

4. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. 268 с.

5. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г. Обратные задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе. Пенза : Изд-во ПГУ, 2014.

6. Czajkowski K., Kesselman C., Fitzgerald S. M., Foster I. T. Grid information services for distributed resource sharing // Proceedings 10th IEEE International Symposium on High Performance Distributed Computing. 2001. P. 181–194.

**Математическое и компьютерное моделирование
оценки риска эксплуатации взрывоопасных объектов
при их длительном хранении**

Александр Николаевич Купцов¹, Константин Владимирович Печаткин²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹kuptsov1953@gmail.com, ²phetryok@gmail.com

Аннотация. Обоснован критерий оценки риска эксплуатации взрывоопасных объектов как максимальный прогнозный ущерб от чрезвычайных ситуаций. Предлагается математическая модель оценки риска эксплуатации взрывоопасных объектов, позволяющая с помощью ПЭВМ рассчитать максимальный прогнозный ущерб от чрезвычайной ситуации по причине пожара и взрывов. Приведен алгоритм расчета риска объекта хранения и его программное обеспечение. Предложены практические рекомендации.

Ключевые слова: риск, чрезвычайные ситуации, взрывоопасные объекты, материальный ущерб, алгоритм расчета риска, программное обеспечение

**Mathematical and computer modeling of the risk assessment
of operating explosive objects during their long-term storage**

Aleksandr N. Kuptsov¹, Konstantin V. Pechatkin²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹kuptsov1953@gmail.com, ²phetryok@gmail.com

Abstract. The article substantiates the criterion for assessing the risk of operating explosive objects as the maximum forecast damage from emergency situations. A mathematical model for assessing the risk of operating objects is offered, which allows using a PC to calculate the maximum forecast damage from an emergency situation due to fire and explosions. The algorithm for calculating the risk of a storage object and its software are given. Practical recommendations are offered.

Keywords: risk, emergencies, explosive objects, material damage, risk calculation algorithm, software

В последнее время в нашей стране увеличилось число пожаров на территориях хранения взрывоопасных объектов (взрывчатые вещества, боеприпасы и т.п. объекты). Это приводит к возникновению чрезвычайных ситуаций (ЧС), ведущим к большим материальным потерям и даже человеческим жертвам. Для совершенствования существующей системы хранения взрывоопасных объектов, анализа предлагаемых решений при построении новых баз хранения взрывоопасных объектов (БХВО) нужно иметь математический аппарат. Он должен оценивать риск эксплуатации

взрывоопасных объектов на основе более точной математической модели ЧС при пожарах и взрывах. Математический аппарат такой модели ЧС дается в работах [1,2,3]. Так, в работе [1] разработана математическая модель развития пожара на территории хранения взрывоопасных объектов, которая позволяет определять параметры движения контура пожара во времени и пространстве. В работах [2,3] получены зависимости вычисления вероятности поражения хранилищ от взрывов и расчета предельной дальности полета поражающих элементов (осколков, разбрасываемых боеприпасов, разлетающихся выстрелов с работающими реактивными двигателями). Это позволило создать наиболее точную модель распространения пожара и взрывов на БХВО, используя которую можно рассчитать различные сценарии развития чрезвычайной ситуации.

Обоснуем количественный показатель оценки риска для эксплуатации взрывоопасных объектов. В работах [4,5,6] в качестве показателей оценки риска принимаются вероятность наступления неблагоприятного события или размер причиненного им ущерба. В случае эксплуатации взрывоопасных объектов затруднено получение вероятностных характеристик процессов, протекающих на БХВО. В этом случае с учетом статического характера функционирования объектов хранения боеприпасов предпочтительным критерием риска будет являться оценка прогнозного (ожидаемого) ущерба при развитии ЧС на территориях хранения взрывоопасных объектов. Для такого подхода риск интерпретируют как математическое ожидание ущерба, возникающего при авариях, катастрофах и опасных природных явлениях

$$R_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Pi_{a_i}, \quad (1)$$

где R_a – уровень риска, выраженный через математическое ожидание (среднее значение) ущерба; Π_{a_i} – величина материальных потерь (ущерба) при i -м событии; n – количество сценариев в полной выборке сценариев развития ЧС, определенных путем математического моделирования.

Для качественных оценок риска, с учетом большой социальной значимости событий, связанных с ЧС на БХВО, можно предложить рассчитать риск как максимальный прогнозный ущерб от чрезвычайных ситуаций. В этом случае формула (1) приобретает вид

$$R_{am} = \max_{i=1, \dots, n} (\Pi_{a_i}), \quad (2)$$

где R_{am} – уровень риска, выраженный через максимальное значение ущерба.

Последняя интерпретация риска находит широкое практическое применение, так как развитие чрезвычайных ситуаций является сложным

процессом, предполагающим введение множества условных входных данных. В этих условиях вероятность правильного расчета сценария развития ЧС не превышает 0,8. Поэтому в данном случае целесообразно рассчитывать самый катастрофический сценарий развития ЧС, что снимает неопределенность в принятии решения на парирование угроз и снижает социальные потери, являющиеся приоритетными.

Опираясь на изложенное выше обоснование критерия оценки риска эксплуатации взрывоопасных объектов, как ущерба в результате возникновения чрезвычайной ситуации (аварии) на БХВО, необходимо проработать вопрос его вычисления. С учетом комбинации различных методологических подходов, принятых для расчета ущерба, предлагается зависимость вычисления многофакторного ущерба в виде аддитивной функции от шести параметров, характеризующих типовые убытки:

$$P_a = P_{n.n.} + P_{л.а.} + P_{с.э.} + P_{н.в.} + P_{экол.} + S_{в.}, \quad (3)$$

где P_a – полный ущерб от аварий, млн. руб.; $P_{n.n.}$ – прямые потери, млн. руб.; $P_{л.а.}$ – затраты на локализацию (ликвидацию) и расследование аварии, млн. руб.; $P_{с.э.}$ – социально-экономические потери (затраты, понесенные вследствие гибели и травматизма личного состава), млн. руб.; $P_{н.в.}$ – косвенный ущерб, млн. руб.; $P_{экол.}$ – экологический ущерб (урон, нанесенный объектам окружающей природной среды), млн. руб.; $S_{в.}$ – затраты на восстановление военно-стратегического потенциала (стоимость воспроизводства уничтоженного имущества и необходимых для его размещения основных фондов), млн. руб.

Прямые потери БХВО от чрезвычайных ситуаций ($P_{n.n.}$) включают в себя:

1. Потери БХВО в результате уничтожения или повреждения основных фондов (производственных и непроизводственных). Основными фондами считают сооружения БХВО, системы инфраструктуры (сигнализации, пожаротушения, молниезащиты, автомобильных и железнодорожных дорог, электро- и теплоснабжения, оборудование цехов, погрузо-разгрузочное оборудование, автотранспорт и др.).

2. Потери БХВО в результате уничтожения (повреждения) материальных ценностей и другого имущества. К материальным ценностям относятся взрывоопасные объекты, включая стоимость штатной укупорки, и другое хранимое имущество.

3. Потери в результате уничтожения или повреждения имущества третьих лиц, включая и население. Определяются аналогично определению ущерба имуществу БХВО (для юридических лиц), а также на основании рыночной стоимости принадлежащего им по праву собственности или владения имущества (для физических лиц) с учетом данных страховых компаний (в случае застрахованного имущества).

Величина $P_{л.а.}$ состоит из расходов, связанных с локализацией и ликвидацией последствий ЧС, и расходами на расследование аварии. Расходы на локализацию (ликвидацию) ЧС включают: - стоимость электрической, тепловой энергии и других ресурсов, израсходованных при ликвидации аварии; - стоимость материалов, израсходованных при ликвидации аварии; - стоимость услуг специализированных организаций по ликвидации аварии (стоимость пожаротушения и разминирования неразорвавшихся взрывоопасных объектов). Расходы на расследование аварии включают: - оплату труда членов комиссии по расследованию ЧС (аварии); - затраты на НИР и мероприятия, связанные с рассмотрением технических причин аварии; - стоимость услуг экспертов, привлекаемых для расследования технических причин аварии, и оценку (в том числе экономическую) последствий аварии.

Социально-экономические потери ($P_{сэ.}$) определяют как сумму затрат на компенсации и мероприятия вследствие гибели личного состава и третьих лиц или их травмирования. Сюда включаются затраты на погребение погибших и выплаты пособий в случае смерти при выполнении служебных обязанностей, расходы на выплату пособий по временной нетрудоспособности и пенсий лицам, ставшим инвалидами, а также расходы, связанные с повреждением здоровья пострадавших, на их медицинскую, социальную и профессиональную реабилитацию.

Косвенный ущерб ($P_{н.в.}$) вследствие аварий рекомендуется определять как сумму полученных БХВО убытков, сумму израсходованной заработной платы и части условно-постоянных расходов за период аварии и восстановительных работ, убытков, вызванных уплатой различных неустоек, штрафов, пени и пр., а также убытки третьих лиц из-за недополученной прибыли.

Экологический ущерб ($P_{экол.}$) определяют как сумму ущерба от различных видов вредного воздействия на объекты окружающей природной среды. Он вычисляется по зависимости

$$P_{экол.} = \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_в + \mathcal{E}_n + \mathcal{E}_б + \mathcal{E}_o, \quad (4)$$

где $\mathcal{E}_a$ – ущерб от загрязнения атмосферы; $\mathcal{E}_в$ – ущерб от загрязнения водных ресурсов; $\mathcal{E}_n$ – ущерб от загрязнения почвы; $\mathcal{E}_б$ – ущерб, связанный с уничтожением биологических (в том числе лесных массивов) ресурсов; $\mathcal{E}_o$ – ущерб от засорения (повреждения) территории обломками (осколками) зданий, сооружений, оборудования и т.п.

Ущерб потерь по данным статьям фактически позволяет рассчитать максимальный прогнозный ущерб от чрезвычайной ситуации на АБС хранения боеприпасов. При расчете ущерба по данной зависимости учитываются исходные данные, как по АБС, так и по третьим лицам, размещенным в местах их дислокации, и статистическим характеристикам региона.

Для расчета риска эксплуатации взрывоопасных объектов с использованием математической модели развития ЧС [1,2,3] были разработаны алгоритм и программа. На рис.1 показана общая схема алгоритма расчета риска объектов хранения, составленная с учетом формул (1), (2) и предложенной зависимости расчета многофакторного ущерба по формуле (3).

По данному алгоритму была составлена программа вычисления материального ущерба в зависимости от различных сценариев развития ЧС и номенклатуры хранимого на объектах имущества, а также находящихся вокруг БХВО гражданских объектов. Имитационная математическая модель, алгоритм и программа представляют собой в целом метод оценки риска эксплуатации взрывоопасных объектов. Он позволяет с помощью ПЭВМ без больших материальных затрат произвести расчеты среднего и максимального прогнозного ущерба от чрезвычайных ситуаций, связанных с пожарами и взрывами на БХВО. Полученные оценки материального ущерба могут считаться мерами риска для данной базы хранения взрывоопасных объектов.

На основании разработанного методического аппарата создан программный комплекс имитационно-моделирующих средств. Он позволяет с помощью ПЭВМ рассчитать сценарии развития чрезвычайных ситуаций от пожара и взрывов для конкретных баз хранения взрывоопасных объектов, а также оценить максимальный прогнозный ущерб как меру риска от их последствий.

В качестве экспериментального подтверждения работоспособности предложенных методик и созданной имитационной модели проведены расчеты оценки риска эксплуатации взрывоопасных объектов для одной из баз хранения взрывоопасных объектов, которая реально пострадала в результате пожара и взрывов летом 2011 года. Разница между рассчитанной величиной полного ущерба от ЧС по вышеописанной методике и без ее применения (вручную) составила 15%, что вполне допустимо.

На рис. 2 показаны составляющие полного ущерба от чрезвычайной ситуации на этой базе хранения взрывоопасных объектов. Как видно из рисунка наибольшими составляющими полного ущерба являются затраты на восстановление военно-стратегического потенциала и прямые потери.

Полученный методический аппарат и программный комплекс имитационно-моделирующих средств могут быть использованы для практических целей при: тренировке пожарных команд на мониторе компьютера как на тренажере с использованием модели развития пожара в реальном времени; создании электронного паспорта базы хранения взрывоопасных объектов, который позволит существенно облегчить повседневную деятельность личного состава; выборе оптимального варианта соотношения количества, номенклатуры, размещения взрывоопасных объектов в хранилищах БХВО с использованием имитационной модели развития ЧС и вычисления максимального прогнозного ущерба.

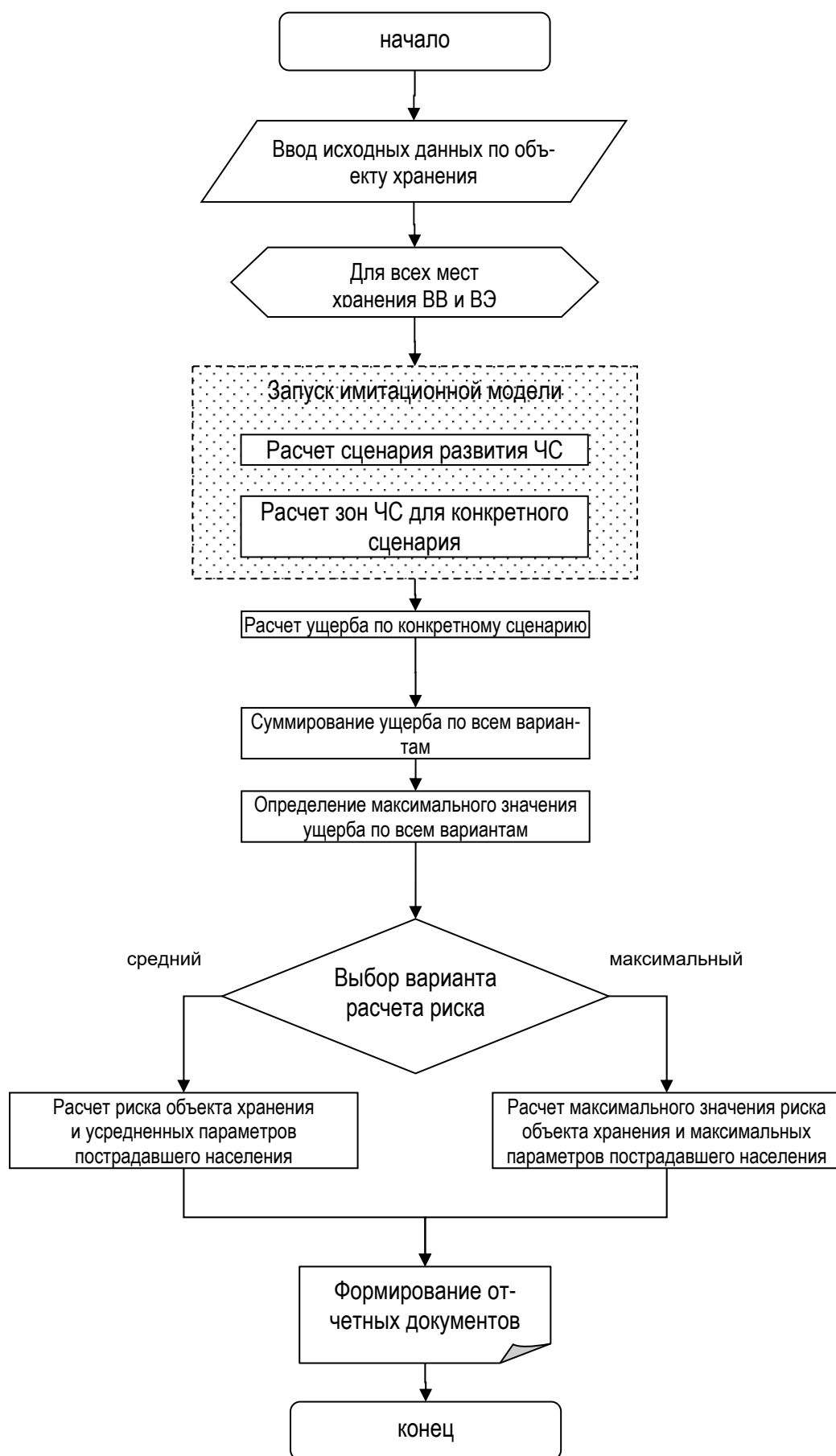


Рис. 1. Схема алгоритма расчета риска объекта хранения

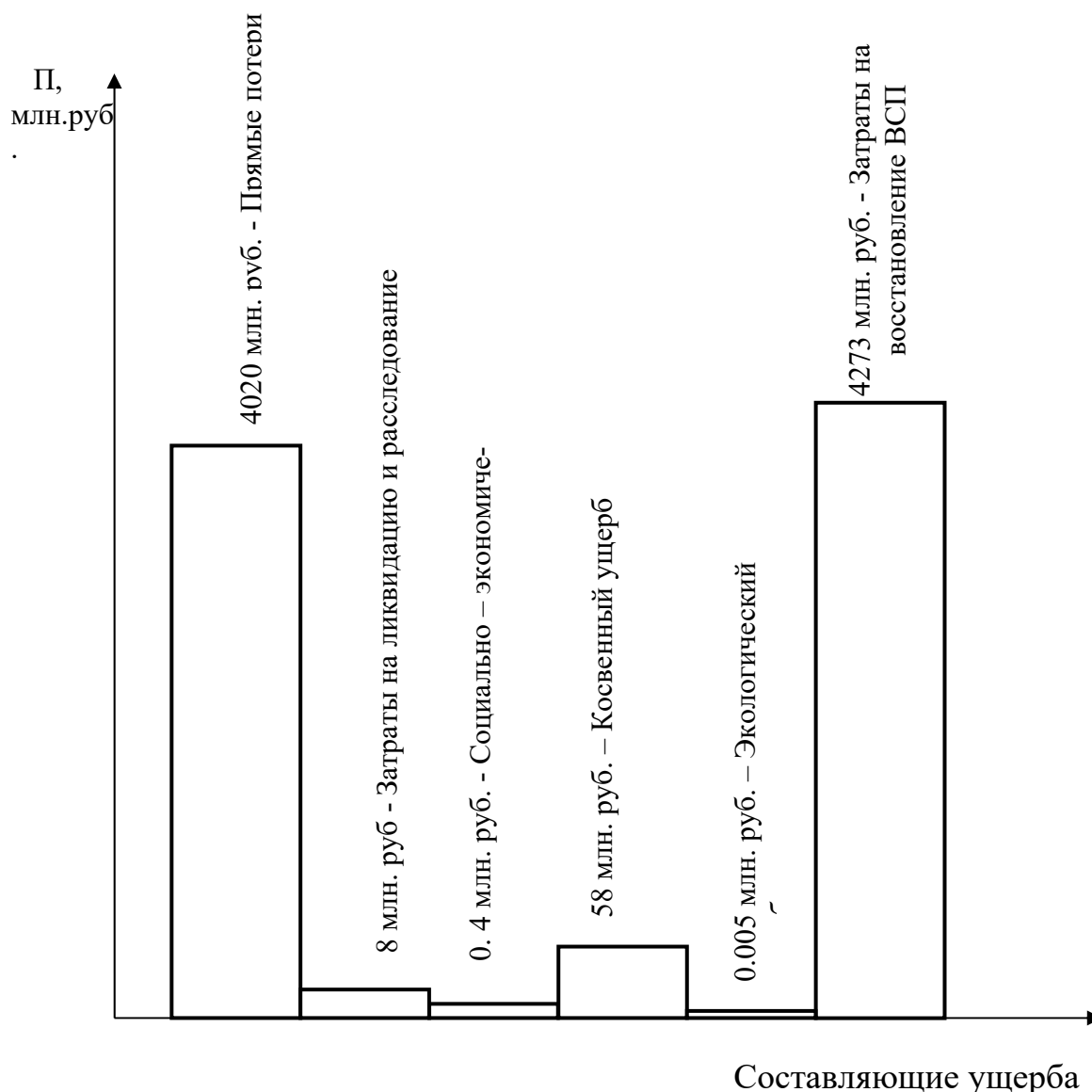


Рис. 2. Составляющие полного ущерба от чрезвычайной ситуации на базе хранения взрывоопасных объектов

Таким образом, разработана и экспериментально опробована математическая модель, алгоритм и программа оценки риска эксплуатации взрывоопасных объектов с использованием имитационной модели развития пожара и взрывов. Она позволяет рассчитывать сценарии развития чрезвычайных ситуаций от пожара и взрывов на территории хранения взрывоопасных объектов с последующей оценкой материального ущерба как меры риска от их последствий. Это позволит с помощью вычислений на ПЭВМ оценить степень защищенности от внешних факторов существующие или создаваемые базы хранения взрывоопасных объектов, а также проводить тренировки по действию пожарных команд в местах их дислокации с помощью монитора компьютера.

Список литературы

1. Купцов А. Н., Печаткин К. В. Математическое моделирование пожара на территории хранения взрывоопасных объектов и его программное обеспечение // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XV Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (1–4 июня 2021г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. С. 187–192.
2. Купцов А. Н., Држевецкий Ю. А. Учет защитных свойств среды при вычислении вероятности осколочного поражения хранилищ при взрывах и разлете боеприпасов // Инновационные технологии в проектировании и производстве : тр. Международного симпозиума. Пенза : Изд-во. ПГУ, 2011. С. 182–184.
3. Курков С. Н., Купцов А. Н., Плющ А. А. Влияние защитных свойств среды на динамику развития чрезвычайной ситуации, обусловленной ландшафтным пожаром, на арсеналах и базах хранения боеприпасов // Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. 2013. № 5-6. С. 110–114.
4. Гражданкин А. И., Дегтярев Д. В., Лисаков М. В., Печеркин А. С. Основные показатели риска аварии в терминах теории вероятностей // Безопасность труда в промышленности. 2002. № 7. С. 35–39.
5. Арнольд В. И. Теория катастроф. М. : Наука, 1990. 128 с.
6. Алымов В. Т., Тарасова Н. П. Техногенный риск: Анализ и оценка. М. : Академкнига, 2005. 118 с.

Численный метод решения векторной трехмерной обратной задачи электродинамики

Марина Александровна Москалева

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

m.a.moskaleva1@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена трехмерная векторная обратная задача дифракции, которая состоит в восстановлении диэлектрической проницаемости тела. Исследуемое тело находится в полубесконечном прямоугольном волноводе. Для численного решения обратной задачи построен двухшаговый метод, основанный на сведении обратной задачи к объемному сингулярному интегральному уравнению и дополнительной процедуре пересчета диэлектрической проницаемости тела. Приведены численные результаты. Предложенный метод может быть эффективно использован для конструирования композитов и наноструктур, а также для их исследования методом неразрушающего контроля.

Ключевые слова: краевая задача, обратная задача дифракции, интегродифференциальное уравнение, диэлектрическая проницаемость

Финансирование: работа поддержана грантом Президента Российской Федерации № МК-2965.2021.1.1.

Numerical method for solving a vector three-dimensional inverse problem of electrodynamics

Marina Aleksandrovna Moskaleva

Penza State University, Penza, Russia

m.a.moskaleva1@gmail.com

Abstract. The vector three-dimensional inverse problem of diffraction is considered. This problem consists in determining the permittivity of a body located in a semi-infinite rectangular waveguide. For the numerical solution of the inverse problem, it is proposed to use a two-step method. This method is based on reducing the inverse problem to a volumetric singular integral equation and an additional procedure for recalculating the permittivity of the body. Numerical results are presented. The proposed method can be effectively used for the design of composites and nanostructures, as well as for their study by non-destructive testing.

Keywords: boundary value problem, inverse diffraction problem, integro-differential equation, dielectric constant

Acknowledgments: this study is supported by grant of the President of the Russian Federation № МК-2965.2021.1.1.

Введение

Статья посвящена трехмерной векторной задаче электродинамике, заключающейся в восстановлении диэлектрической проницаемости тел, имеющих композитную структуру. Рассматриваемое тело находится в полубесконечном прямоугольном волноводе, при этом падающее поле создается точечным источником, расположенным вне тела. Диэлектрическая проницаемость восстанавливается неинвазивными методами, с использованием измерений величины поля в точках наблюдения, находящихся вне тела [1-3].

На практике подобные задачи возникают при моделировании и создании наноматериалов с заданными свойствами, а также при восстановлении характеристик образцов композитных анизотропных материалов по результатам измерения поля вне тела.

Для численного решения обратной задачи в статье предлагается использовать двухшаговый метод, основанный на сведении обратной задачи к объемному сингулярному интегральному уравнению и дополнительной процедуре пересчета диэлектрической проницаемости тела. Одно из главных преимуществ этого метода в том, что он не требует начального приближения.

Постановка обратной задачи дифракции

Рассмотрим волновод P , являющийся прямоугольным и полубесконечным, с идеально проводящими стенками ∂P . В волноводе расположено диэлектрическое, немагнитное тело Q , параметры неоднородности которого нужно восстановить. На некотором расстоянии от тела Q в волноводе P находится набор плоскостей S , на которых выбраны точки наблюдения x_c . Геометрия задачи представлена на рисунке 1.

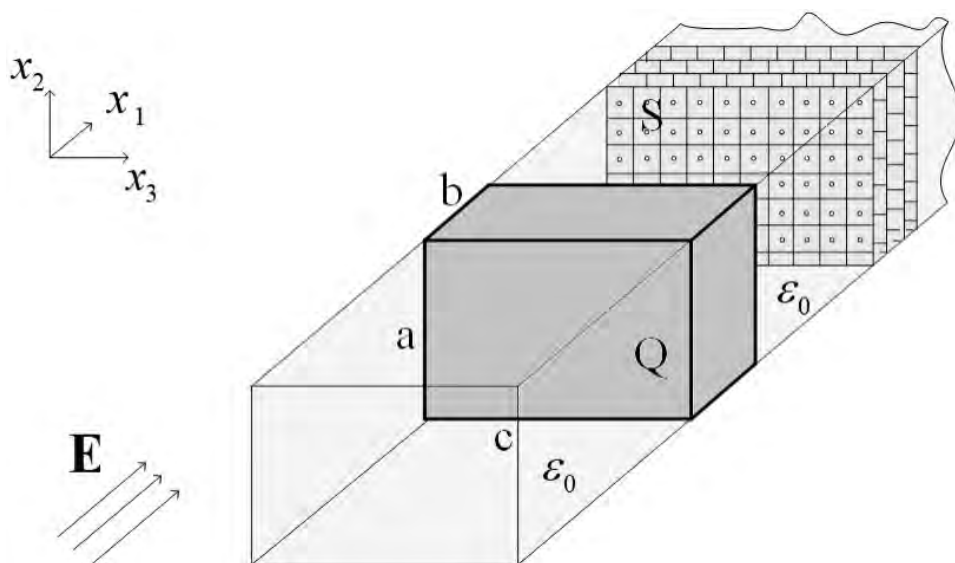


Рис. 1. Геометрия задачи

Волновод заполнен однородной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0 = \text{const}$. Диэлектрическая проницаемость тела описывается тензор-функцией $\hat{\varepsilon}(x) > 0$, $\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$. Будем предполагать, что тело Q не касается стенок волновода P , т.е. $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$, ∂Q - кусочно-гладкая граница тела [4,5].

Заклучим тело Q в прямоугольный параллелепипед Θ , затем выберем на нем регулярную прямоугольную сетку:

$$\Theta = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\},$$

ячейки которой определяются как

$$\Theta_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\}.$$

Узлы сетки определяются как

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1} k, \quad x_{2,b} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2} l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3} m,$$

где $k = 0, \dots, N_1 - 1$, $l = 0, \dots, N_2 - 1$, $m = 0, \dots, N_3 - 1$. Размер вычислительной сетки равен $N = N_1 \times N_2 \times N_3$.

Двухшаговый метод решения обратной задачи

Для восстановления параметров неоднородности тела будем решать интегральное уравнение, получение которого подробно описано в работах [5, 6].

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_c) = \mathbf{E}^0(x_c) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - I \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - I \right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x_c \notin Q. \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{E}(x_c)$ – электрическое поле, возбуждаемое в волноводе монохроматическим полем, источником которого является ток $\mathbf{j}_E^0 \in L_{2,\infty}(P)$, и измеренное в точках наблюдения x_c , расположенных на наборе S ;

$\mathbf{E}_0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \exp\left(-i \gamma_1^{(2)} x_3\right)$ – падающее поле, k_0 – волновое число свободного пространства, $\hat{G}_E$ – тензоры Грина, I – единичный тензор. Далее решаем уравнение (1) относительно неизвестной функции

$$\mathbf{J}(y) = \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - I \right) \mathbf{E}(y).$$

Первый шаг метода заключается в решении интегрального уравнения первого рода (2)

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x_c)}{\left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - I \right)} - \mathbf{E}^0(x_c) = k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \notin Q, \end{aligned} \quad (2)$$

при этом используются значения поля в точках наблюдения, полученные ранее.

Далее после того, как мы нашли $\mathbf{J}(x)$, переходим ко второму шагу метода, а именно определяем диэлектрическую проницаемость тела в каждой из подобластей, решая уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}(x)}{\left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - I \right)} - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q \end{aligned} \quad (3)$$

относительно выражения $\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon} - I$.

Численные результаты

В качестве примера представим восстановленные значения диэлектрической проницаемости тела, полученные при решении задачи предложенным методом. Тело Q , расположенное в прямоугольном волноводе, имеет размеры $3 \times 1 \times 2$ см. Тело состоит из двух частей с различными значениями диэлектрической проницаемости и также имеет несколько неоднородных включений. Волновое число вне тела $k_0 = 11.7 \text{ GHz}$. Размер расчетной сетки $8 \times 8 \times 8$. Для получения исходных значений мы решили прямую задачу дифракции и получили смоделированные данные.

На рисунке 2 представлены модуль начального значения диэлектрической проницаемости тела (а) и модуль восстановленного значения (б). Двухшаговый метод позволил восстановить диэлектрическую проницаемость в каждой из подобластей тела.

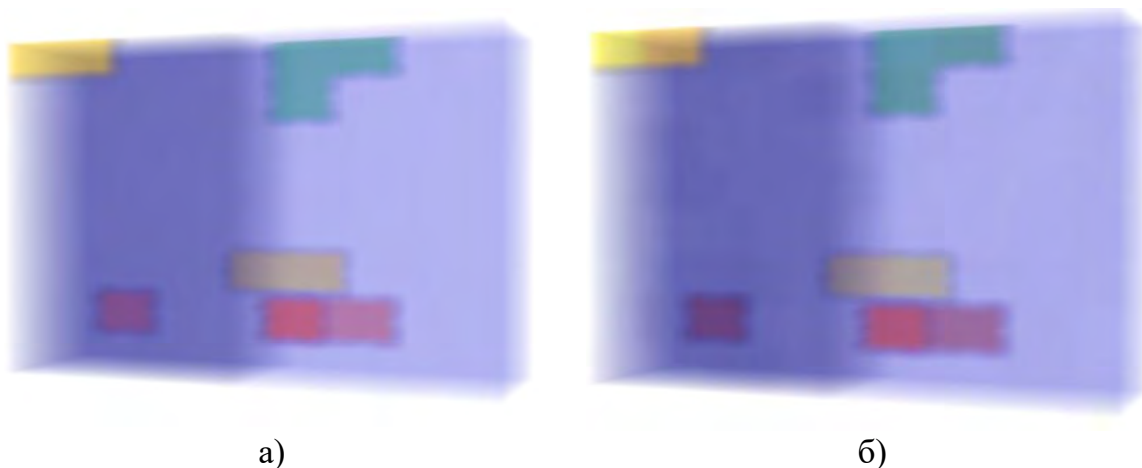


Рис. 2. Пример численного решения обратной задачи дифракции

Заключение

В статье рассмотрена трехмерная векторная задача дифракции, заключающаяся в восстановлении диэлектрической проницаемости тела в полубесконечном прямоугольном волноводе и построен численный метод ее решения. Данный метод реализуется в два шага: сначала решается интегрального уравнения первого рода, отвечающее обратной задаче, а затем - пересчитывается функция диэлектрической проницаемости через ток поляризации. При использовании двухшагового метода не требуется выбирать начальное приближение, что существенно увеличивает круг возможностей для его применения.

Список литературы

1. Eves E., Murphy K., Yakovlev V. Reconstruction of complex permittivity with neural-network-controlled FDTD modeling // The Journal of microwave power and electromagnetic energy: a publication of the International Microwave Power Institute. 2007. Vol. 41, № 4. P. 22–34.
2. Tao Pan, Guo-Ding Xu, Tao-Cheng Zang, Lei Gao. Study of a slab waveguide loaded with dispersive anisotropic // Applied Physics A. 2009. Vol. 95. P. 367–372.
3. Usanov D., Skripal A., Romanov A. Complex permittivity of composites based on dielectric matrices with carbon nanotubes // Technical Physics. 2011. Vol. 56, № 1. P. 102–106.
4. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : ИПРЖР, 1996. 173 с.
5. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. 268 с.
6. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г. Обратные задачи восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе. Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. 76 с.

Методы выравнивания яркости изображения при детектировании объектов

**Ярослав Павлович Щеголихин¹, Максим Александрович Митрохин²,
Александр Александрович Еремин³, Марат Тимурович Нагаев⁴**

^{1,2,3,4}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹yaroslav.schegolikhin@yandex.ru, ²mmax83@mail.ru,

³AlebriumUltra@gmail.com, ⁴nagaevmt@yandex.ru

Аннотация. Настоящее исследование направлено на выявление оптимального алгоритма для выравнивания яркости изображения в целях максимальной результативности при обработке с помощью какого-либо детектора объектов. Актуальность исследования обусловливается масштабным внедрением алгоритмов для нахождения различных объектов на изображениях или видео. Рассматриваются алгоритмы эквализации гистограммы изображения, линейная коррекция, гамма-коррекция и логарифмическая коррекция контрастности изображения. Итогом исследования является определение наиболее подходящего метода в рассматриваемой задаче.

Ключевые слова: распознавание объектов, эквализации гистограммы изображения, линейная коррекция, гамма-коррекция, логарифмическая коррекция

Methods of image brightness equalization during detecting objects

**Yaroslav P. Shchegolikhin¹, Maksim A. Mitrokhin²,
Aleksandr A. Eremin³, Marat T. Nagaev⁴**

^{1,2,3,4}Penza State University, Penza, Russia

¹yaroslav.schegolikhin@yandex.ru, ²mmax83@mail.ru,

³AlebriumUltra@gmail.com, ⁴nagaevmt@yandex.ru

Abstract. Current investigation aims to identifying the optimal algorithm for image brightness equalization in order to maximize efficiency during processing by object detector. The relevance of the research is due to the large-scale implementation of algorithms for finding various objects in images or videos. The algorithms of image histogram equalization, linear correction, gamma correction and logarithmic correction of image contrast are considered. The result of the study is to determine the most appropriate method in the problem under consideration.

Keywords: Object detection, image histogram equalization, linear correction, gamma correction, logarithmic correction

В настоящее время существует огромное количество различных камер, которые способны делать качественные фотографии и видео даже

в плохих погодных условиях или плохой освещенности. Такое оборудование, как правило, стоит достаточно дорого, поэтому невозможно оборудовать подобными камерами какой-либо объект, за которым требуется наблюдение. Также не каждый телефон может обеспечить владельца качественными фотографиями.

Решением данной проблемы является дополнительная обработка изображения с помощью программных алгоритмов, которые также используются в современных профессиональных камерах. Данные алгоритмы могут применяться для улучшения визуального восприятия полученной фотографии пользователем или для использования улучшенного изображения для задач распознавания различных объектов (рис. 1, 2).



Рис. 1. Улучшение визуального восприятия



Рис. 2. Улучшение работы распознавателя объектов

Целью настоящего исследования является определение оптимального метода выравнивания яркости для предварительной обработки изображения перед работой алгоритма распознавания объектов.

Человеческий глаз способен приспосабливаться к изменению освещения. Днем зрение способно меньше воспринимать яркий свет, а ночью наоборот с большей чувствительностью принимать любой свет. Для камер существует экспозиция – параметр, регулирующий количество света, поступающего на светочувствительный элемент камеры [1].

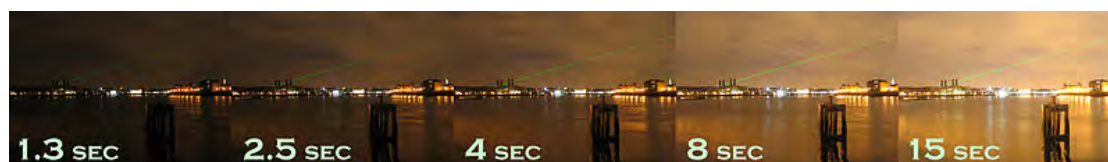


Рис. 3. Влияние экспозиции на фото

Данный параметр позволяет избавиться от засвеченных или затемненных областей на фото. Однако невозможно подобрать экспозицию

так, чтобы на фото присутствовало равномерное освещение, так как разные объекты освещаются в разной степени. На рисунке 4 показано 2 фото, с низкой и высокой экспозицией в левой и правой части соответственно. При фотографировании с низкой экспозицией отчетливо видны детали витража, а также каркас окна, однако остальные части затемнены, так как на них попадает малое количество света. При фотографировании того же объекта с высокой экспозицией в окнах появляются засвеченные области, однако остальные части объекта хорошо видны [2].

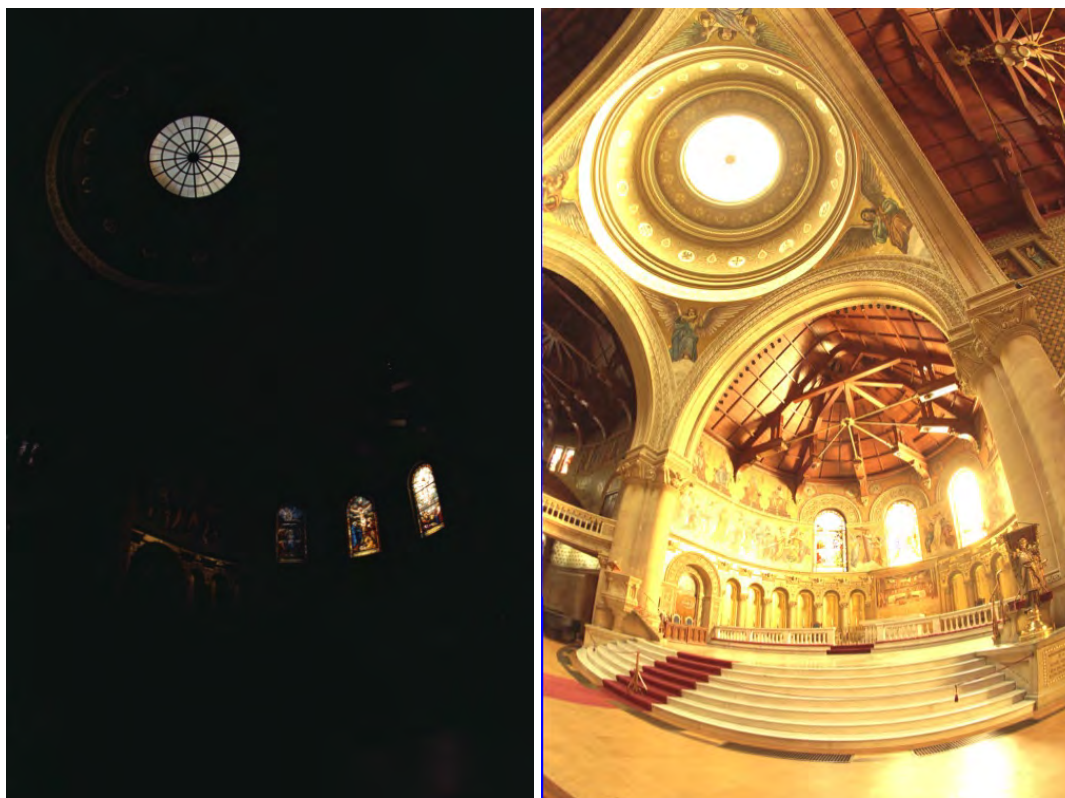


Рис. 4. Фото с различной экспозицией

Для того, чтобы получить фото, на котором будет одинаково хорошо видны очертания окон и остальная архитектура представленного объекта, используются алгоритмы выравнивания яркости. Одним из самых часто используемых алгоритмов является эквализация гистограммы. При фотографировании в условиях неравномерного освещения часто можно встретить излишне темные или светлые части изображения. Данные дефекты можно заметить на гистограмме яркости, построенной на основе исходного фото (рис. 5). В слишком темных фото преобладают пиксели с низким показателем яркости, в ярких наоборот с высоким [3].

Для визуального восприятия предпочтительно более равномерное распределение пикселей. Поэтому для темных изображений увеличивается яркость пикселей, а для светлых уменьшается, формируя равномерное распределение (рис. 6).

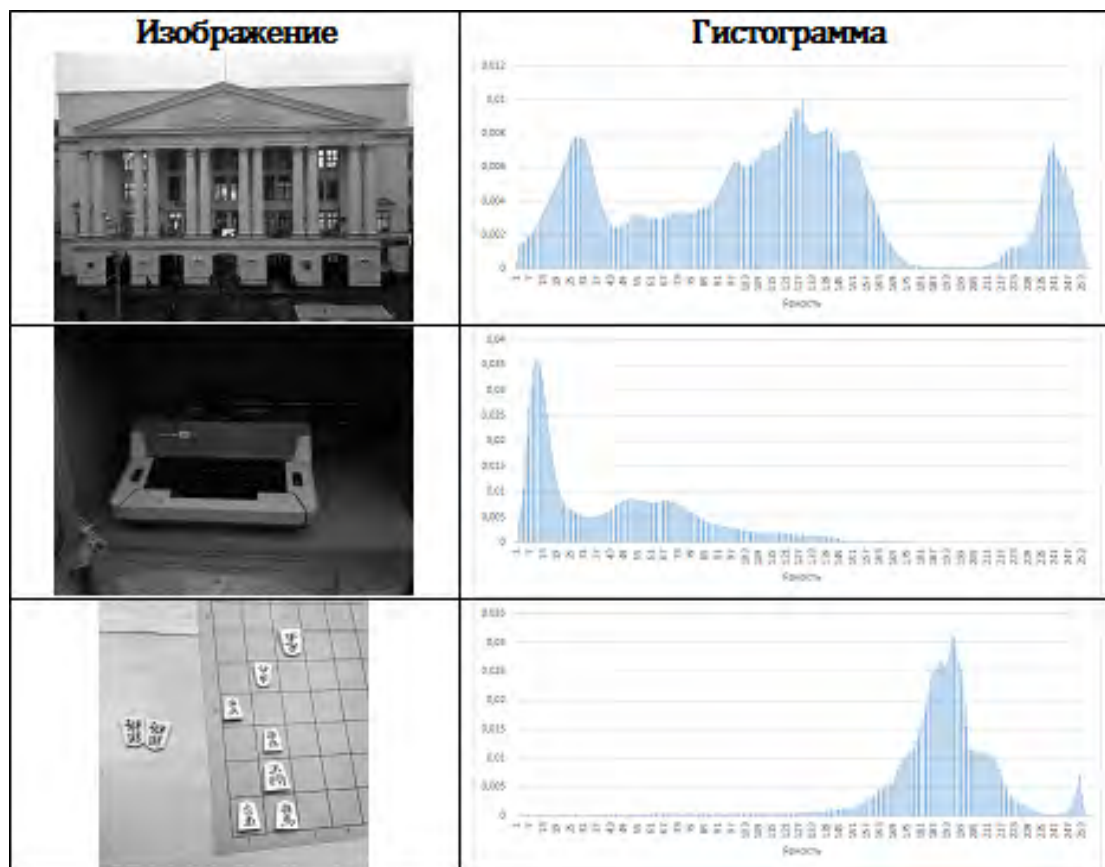


Рис. 5. Гистограмма исходных фото



Рис. 6. Обработанные фото

Одним из часто используемых алгоритмов является линейная коррекция изображения. Данный алгоритм нацелен на улучшение согласования динамического диапазона изображения. Для его реализации необходимо посчитать значение для каждого пикселя изображения по формуле

$$g = \frac{f - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}(g_{\max} - g_{\min}) + g_{\min}, \quad (1)$$

где g – это выходное значение пикселя; f – исходное значение пикселя; $f_{\max}$ – максимальное значение яркости среди всех пикселей изображения; $f_{\min}$ – минимальное значение яркости среди всех пикселей изображения; $g_{\max}$ – максимальное значение яркости среди всех пикселей результирующего изображения; $g_{\min}$ – минимальное значение яркости среди всех пикселей результирующего изображения.

Также существует гамма-коррекция и логарифмическая коррекция контрастности изображения. Гамма-коррекция изначально нацелена на улучшение отображения изображения на пользовательском мониторе [5]. Вычисления производятся по формуле:

$$g = c \cdot f^{\gamma}, \quad (2)$$

где c и γ – константы, подбираемые в зависимости от устройства.

Логарифмическая же коррекция нацелена на преобразование узкого диапазона значений яркости в более широкий. При больших значениях входного сигнала преобразование наоборот приводит к сужению диапазона.

$$g = c \cdot \log(1 + f), \quad (3)$$

где c – константа.

Заключение

Существует огромное количество алгоритмов, подобных описанным выше. Все эти алгоритмы позволяют получить изображение, которое лучше визуально воспринимается человеческим зрением. Благодаря таким алгоритмам можно улучшать фотографии для личного использования, удешевить какую-либо систему видеонаблюдения, используя недорогие камеры. Также подобные подходы можно использовать для формирования улучшенного изображения для повышения результативности работы какого-либо распознавателя (текста, объектов и т.д.).

В настоящее время данные алгоритмы активно используются в мобильных телефонах и профессиональных камерах, позволяя получать профессиональные кадры без дополнительной ручной обработки.

В рамках настоящего исследования наиболее подходящим алгоритмом является эквализация гистограммы. Данный метод анализирует

изображение в целом и позволяет сформировать оптимальный диапазон яркости пикселей. Не требует большого количества вычислений, что позволяет сэкономить на вычислительных ресурсах. Помимо этого, алгоритм не требует каких-либо дополнительных данных в виде констант, благодаря чему не нуждается в лишних настройках в разных условиях съемки.

Список литературы

1. Экспозиция (фото): wikipedia.org. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Экспозиция_\(фото\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Экспозиция_(фото)) (дата обращения: 20.05.2022).
2. Почему свет и темнота на фотографии – это сложно: Habr. URL: <https://habr.com/ru/post/660621/> (дата обращения: 15.05.2022).
3. Эквализация гистограмм для повышения качества изображений: Habr. URL: <https://habr.com/ru/post/244507/> (дата обращения: 12.05.2022).
4. Лукашевич М. М., Садыхов Р. Х. Цифровая обработка сигналов и изображений. Минск : БГУИР, 2011. 12–15с.
5. Learn OpenGL. Урок 5.2 – Гамма-коррекция: Habr. URL: <https://habr.com/ru/post/353632/> (дата обращения: 18.05.2022).

Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в плоском экранированном слое с нелинейной неоднородной средой

Станислав Вячеславович Тихов¹

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

Tik.stanislav2015@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача – назовем ее задачей Q – о распространении электромагнитной ТМ-поляризованной волны в плоском экранированном волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой. С математической точки зрения задача Q представляет собой задачу на собственные значения для уравнений Максвелла. Получено уравнение такое, что все его решения и только они являются собственными значениями задачи Q . Установлена разрешимость задачи Q .

Ключевые слова: распространение электромагнитных волн, нелинейная неоднородная диэлектрическая проницаемость, нелинейная задача на собственные значения

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10015).

The problem on electromagnetic TM-wave propagation in a planar shielded layer with nonlinear nonhomogeneous medium

Stanislav V. Tikhov¹

Penza State University, Penza, Russia

Tik.stanislav2015@yandex.ru

Abstract. The problem (which is called problem Q) on the electromagnetic TM-wave propagation in a planar shielded waveguide filled with nonlinear nonhomogeneous medium is under consideration. From mathematical point of view, problem Q is an eigenvalue problem for Maxwell's equations. An equation such that all its solutions and only they are eigenvalues of problem Q . The results relating to the solvability of problem Q are obtained.

Keywords: electromagnetic wave propagation, nonlinear nonhomogeneous dielectric permittivity, nonlinear eigenvalue problem

Acknowledgments: this study is supported by the Russian Science Foundation under grant 18-71-10015.

Введение

Задачи распространения монохроматических поляризованных (ТЕ- и ТМ-) волн в нелинейных средах активно изучаются как в России, так и

за рубежом (А. D. Boardman, Р. Torres, D. Mihalache, Ю. Г. Смирнов, Д. В. Валовик). Большой интерес представляют нелинейности, отвечающие эффектам самовоздействия (например, Керровская нелинейность); такие эффекты возникают при распространении волн в веществе и имеют широкое применение, например, в физике плазмы, нелинейной оптике, лазерной технике и микроэлектронике. Кроме того, во многих случаях диэлектрическую проницаемость среды следует считать неоднородной по пространству.

Постановка задачи

Пусть электромагнитная волна $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, где

$$\mathbf{E} = (E_x(x), 0, E_z(x))^T e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (0, H_y(x), 0)^T e^{i\gamma z}, \quad (1)$$

есть комплексные амплитуды [1], γ — неизвестный вещественный параметр, ω — круговая частота, распространяется в плоском экранированном диэлектрическом слое $\Sigma = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$. Диэлектрическая проницаемость ϵ среды в волноводе имеет вид $\tilde{\epsilon} = \epsilon + a|\mathbf{E}|^2$, где $\epsilon = \epsilon(x)$ есть непрерывная монотонно возрастающая функция, причем $\epsilon(0) > 0$, и a — положительная постоянная.

Комплексные амплитуды (1) удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2)$$

где $\mu > 0$ — (постоянная) магнитная проницаемость вакуума. Касательные компоненты электрического поля обращаются в нуль на идеально проводящих стенках [2]. Естественно считать, что x -я компонента электрического поля имеет фиксированное значение на одной из границ, например, при $x = 0$.

Числа $\hat{\gamma}$ такие, что существует поле (1), удовлетворяющее перечисленным требованиям, называют **постоянными распространения** волновода. Настоящая задача — назовем ее задачей Q — заключается в их нахождении.

С математической точки зрения, задача Q представляет собой задачу на собственные значения для системы уравнений

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = (\epsilon + \alpha(X^2 + Z^2))Z, \\ -Z' + \gamma X = \gamma^{-1}(\epsilon + \alpha(X^2 + Z^2))X, \end{cases} \quad (3)$$

где $X := iE_x$, $Z := E_z$, $\epsilon(x) = \omega^2\mu\epsilon(x)$, $\alpha = \omega^2\mu a$, с граничными условиями

$$Z(0) = Z(h) = 0, \quad X(0) = X_0 \neq 0, \quad (4)$$

где X_0 – постоянная, которая будет выбрана специальным образом, см. п. «Дополнительное условие».

Линейную задачу (при $\alpha = 0$) назовем задачей Q_0 , а ее собственные значения обозначим через $\tilde{\gamma}$. Из теории известно, что задача Q_0 имеет лишь конечное число собственных значений $\tilde{\gamma}$.

Дополнительное условие

Из системы (3) можно получить следующее уравнение

$$U(x; \gamma^2) - \gamma^2 \int_0^x \varepsilon'(s) (X^2 + Z^2) ds \equiv C, \quad (5)$$

где C – постоянная интегрирования, а

$$U(x; \gamma^2) = U_1(x; \gamma^2) + U_2(x; \gamma^2),$$

$$U_1(x; \gamma^2) = \left(\varepsilon + \alpha (X^2 + Z^2) \right)^2 X^2 - 2\gamma^2 \left(\varepsilon + \alpha (X^2 + Z^2) \right) X^2,$$

$$U_2(x; \gamma^2) = \varepsilon \gamma^2 (X^2 + Z^2) + \frac{1}{2} \alpha \gamma^2 (X^2 + Z^2)^2.$$

Вычислим (5) в точке $x = 0$, получим

$$\left(\varepsilon(0) - \gamma^2 + \alpha X_0^2 \right)^2 X_0^2 + \gamma^2 \left(\varepsilon(0) - \gamma^2 \right) X_0^2 + \frac{1}{2} \alpha \gamma^2 X_0^4 = C, \quad (6)$$

где $X_0 \equiv X(0)$.

Пусть $A > 0$ – некоторое фиксированное число. Указанная в (4) величина X_0 находится из уравнения

$$C(X_0^2) = A, \quad (7)$$

где $C(X_0^2)$ определена левой частью выражения (7).

Уравнение (8) всегда имеет и при том единственное решение при любом $A > 0$ и $\gamma > 0$.

Интегральное характеристическое уравнение

Введем функции $\tau(x; \gamma) = X^2 + Z^2$, $\eta(x; \gamma) = (\varepsilon + \alpha \tau) X Z^{-1}$. Функция η имеет в общем случае $n+1$ точек разрыва x_j , $j = \overline{0, n+1}$, на отрезке $[0, h]$, где $x_0 = 0$, $x_{n+1} = h$; точки разрыва x_j являются нулями функции Z . Введем интервалы $I_j = (x_j, x_{j+1})$, $j = \overline{0, n}$. На каждом интервале

I_j функция η непрерывна и монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$; отсюда следует, существование непрерывных биекций $g_j: \mathbb{R} \rightarrow I_j: \eta \rightarrow x$ прямой $\mathbb{R}$ на интервалы I_j .

Интегральное характеристическое уравнение задачи Q имеет вид

$$\sum_{j=0}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s; \gamma)} = h, \quad (9)$$

где $n = 0, 1, \dots$ – целые числа,

$$w_j(s; \gamma) = \frac{\gamma(\varepsilon + \alpha\tau)^2 + \gamma^{-1}(\varepsilon - \gamma^2 + \alpha\tau)s^2}{\varepsilon + \alpha\tau},$$

а τ определяется из уравнения

$$s^2 = \frac{(\varepsilon + \alpha\tau)^2 \left(2^{-1} \alpha \gamma^2 \tau^2 + \varepsilon \gamma^2 \tau - \gamma^2 \int_0^x \varepsilon' \tau ds - C \right)}{(\varepsilon + \alpha\tau) \left(2\gamma^2 - (\varepsilon + \alpha\tau) \right) \tau - \left(2^{-1} \alpha \gamma^2 \tau^2 + \varepsilon \gamma^2 \tau - \gamma^2 \int_0^x \varepsilon' \tau ds - C \right)},$$

где $x \equiv g_j(s)$, а g_j есть непрерывная биекция $\mathbb{R}$ на интервал I_j .

Теорема 1. Задача Q эквивалентна уравнению (9) в том смысле, что число $\hat{\gamma}$ является собственным значением задачи Q если и только если существует целое число $\hat{n} \geq 0$ такое, что $\gamma = \hat{\gamma}$ удовлетворяет уравнению (9) при $n = \hat{n}$.

Основные результаты

Далее кроме обозначения $\hat{\gamma}$ будем использовать обозначения $\hat{\gamma}_i$ и $\hat{\gamma}(m)$; первому из этих обозначений отвечают собственные значения задачи Q , упорядоченные по возрастанию, во втором случае $\gamma = \hat{\gamma}(m)$ является решением уравнения (9) при $n = m$.

Теорема 2. Задача Q имеет бесконечное число положительных собственных значений $\hat{\gamma}_i$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме того, верны следующие утверждения:

1) если задача Q_0 имеет p решений $\tilde{\gamma}_i (i = \overline{1, p})$, то существует постоянная $\alpha_0 > 0$ такая, что для любого (< 0) $\alpha = \alpha' < \alpha_0$ верно, что $\lim_{\alpha' \rightarrow +0} \hat{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_i (i = \overline{1, p})$, где $\hat{\gamma}_1 < \dots < \hat{\gamma}_p$ – первые p решений задачи Q при $\alpha = \alpha'$;

2) для больших γ и произвольного $\Delta > 0$ справедливо неравенство

$$(1 - \Delta) \gamma_*(m) \leq \hat{\gamma}(m) \leq (1 + \Delta) \gamma_*(m),$$

где $\gamma_*(m) = g^{-1}\left(\frac{h}{2\sqrt{3}m}\right)$, g^{-1} – функция, обратная к $g(t) = \frac{\ln t}{t}$.

Заключение

Итак, в данной работе исследована нелинейная задача на собственные значения для системы уравнений Максвелла, описывающая распространение ТМ-волн в плоском экранированном волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой.

Установлено существование бесконечного числа собственных значений задачи $\mathcal{Q}$ при любых даже сколь угодно малых значениях параметра α (см. теорему 2).

Схожие результаты были получены в работе [3], где исследуется распространение ТМ-волн в плоском диэлектрическом слое, заполненном нелинейной анизотропной средой.

Список литературы

1. Eleonskii P. N., Oganess'yants L. G., Silin V. P. Cylindric Nonlinear Waveguides // Soviet Physics JETP. 1972. Vol. 35, № 1. P. 44–47.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988. 440 с.
3. Валовик Д. В., Тихов С. В. Асимптотический анализ нелинейной задачи на собственные значения, возникающей в теории волноводов // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 12. С. 1610–1624.

Исследование пиролиза углеводородных смесей с целью получения ценных продуктов химических реакций

Кирилл Игоревич Малов¹, Елизавета Евгеньевна Пескова²

^{1,2}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, Россия

²Институт катализа имени Г. К. Борескова Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, Россия

¹malovkapeji2000@gmail.com, ²e.e.peskova@mail.ru

Аннотация. Проведено исследование пиролиза этан-метановых смесей под воздействием внешнего обогрева стенок реактора цилиндрической формы. При построении математической модели используются уравнения Навье – Стокса и уравнения химической кинетики, представляющие собой процесс пиролиза метана. Получены картины распределения основных продуктов пиролиза при различных условиях проведения вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнения Навье – Стокса, уравнения химической кинетики, пиролиз углеводородов

Финансирование: работа Песковой Е. Е. поддержана РНФ (грант № 21-19-00429).

The study of pyrolysis of hydrocarbon mixtures in order to obtain valuable products of chemical reactions

Kirill I. Malov¹, Elizaveta E. Peskova²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

²Borisevsk Institute of Catalysis SB RAS, Novosibirsk, Russia

¹malovkapeji2000@gmail.com, ²e.e.peskova@mail.ru

Abstract. A study of pyrolysis of ethane-methane mixtures under the influence of external heating of the walls of a cylindrical reactor was carried out. When constructing a mathematical model, the Navier-Stokes equations and chemical kinetics equations representing the process of methane pyrolysis are used. The distribution patterns of the main pyrolysis products are obtained under various conditions of the computational experiment.

Keywords: mathematical modeling, Navier-Stokes equations, chemical kinetics equations, pyrolysis of hydrocarbons

Acknowledgments: the scientific research of Peskova E. E. was carried out with the support of the grant of the Russian Science Foundation No. 21-19-00429.

Пиролиз углеводородов для получения этилена, ацетилен, водорода и пропилена является важным процессом для современной химиче-

ской промышленности. Данные эндотермические процессы протекают в пиролизных трубах, которые поглощают тепло от внешних источников. Высокая цена на сырье и энергоресурсы не позволяет провести достаточно большое количество опытов для создания обширной экспериментальной базы, с другой - изменение технологических параметров процесса может привести к нежелательным и даже опасным последствиям. Отсюда возникает необходимость использования компьютерного моделирования для разработки и усовершенствования технологий.

Данная работа посвящена исследованию высокотемпературной конверсии смеси углеводородов с целью максимальной выработки целевого продукта при минимальных затратах с использованием разработанного ранее вычислительного алгоритма повышенного порядка аппроксимации [1, 2].

Течение многокомпонентной реакционноспособной дозвуковой газовой смеси описывается системой уравнений Навье-Стокса и жесткой системой уравнений, отвечающей за химические превращения. Уравнения Навье-Стокса имеют следующий вид [3]:

$$\frac{\partial \rho Y_m}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho Y_m \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{J}_m + R_m,$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) - \nabla \pi + \nabla \cdot \vec{\tau},$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho h \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{q}.$$

Здесь $m=1, \dots, M$, M - количество компонентов в газовой смеси, ρ - плотность смеси, h - энтальпия смеси, Y_m - массовая доля m -й компоненты, $\vec{v}$ - вектор скорости, R_m - скорость образования или расхода m -той компоненты, $\vec{J}_m = -\rho D_{m,mix} \nabla Y_m$ - вектор диффузионного потока, $\vec{q} = -\nabla T - \sum_m h_m \rho D_{m,mix} \nabla Y_m$ - вектор потока тепла, $\vec{\tau} = \mu \left(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \vec{v}) I$ - тензор вязких напряжений, T - температура.

Система уравнений замыкается уравнением состояния смеси идеальных газов и условием на дивергенцию вектора скорости:

$$S \equiv \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho C_p T} \left(\nabla \cdot \nabla T + \sum_i \rho D_{im} \nabla Y_i \nabla h_i \right) + \frac{1}{\rho} \sum_i \frac{M_w}{M_{wi}} (\nabla \cdot \rho D_{im} \nabla Y_i) + \frac{1}{\rho} \sum_i \left(\frac{M_w}{M_{wi}} - \frac{h_i}{C_p T} \right) R_i.$$

Химические превращения веществ описываются схемой пиролиза метана [4], которая состоит из 24 стадий и включает 11 компонент смеси. Получаемая система уравнений химической кинетики является жесткой и решается с помощью подключаемого пакета RADAU5 [5]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dY_1}{dt} &= -k_1Y_1 + k_2Y_5Y_5 - k_3Y_1Y_5 + k_4Y_4Y_6 - k_7Y_1Y_7 + k_8Y_3Y_6 + k_{11}Y_6Y_6, \\
 \frac{dY_2}{dt} &= k_5Y_6 - k_6Y_2Y_7 - k_9Y_2Y_5 + k_{10}Y_8 + k_{11}Y_6Y_6 - k_{12}Y_2Y_8 - \\
 &\quad k_{13}Y_2Y_5 + k_{14}Y_4Y_{10} - k_{21}Y_2Y_7 + k_{22}Y_{10}Y_3, \\
 \frac{dY_3}{dt} &= k_7Y_1Y_7 - k_8Y_3Y_6 + k_{16}Y_{10}Y_7 + k_{17}Y_4Y_7 - k_{18}Y_3Y_5 + k_{21}Y_2Y_7 - k_{22}Y_{10}Y_3, \\
 \frac{dY_4}{dt} &= k_3Y_1Y_5 - k_4Y_4Y_6 + k_{13}Y_5Y_2 - k_{14}Y_4Y_{10} + k_{15}Y_5Y_{10} - \\
 &\quad -k_{17}Y_4Y_7 + k_{18}Y_3Y_5 - k_{23}Y_4 + k_{24}Y_5Y_7, \\
 \frac{dY_5}{dt} &= 2k_1Y_1 - 2k_2Y_5Y_5 - k_3Y_1Y_5 + k_4Y_4Y_6 - k_9Y_5Y_2 + k_{10}Y_8 - k_{13}Y_5Y_2 + k_{23}Y_4 + \\
 &\quad + k_{14}Y_4Y_{10} - k_{15}Y_5Y_{10} + k_{17}Y_4Y_7 - k_{18}Y_3Y_5 - 2k_{19}Y_5Y_5 + 2k_{20}Y_6Y_7 - k_{24}Y_7Y_5, \\
 \frac{dY_6}{dt} &= k_3Y_1Y_7 - k_4Y_4Y_6 - k_5Y_6 + k_6Y_2Y_7 + k_7Y_7Y_1 - \\
 &\quad -k_8Y_3Y_6 - 2k_{11}Y_6Y_6 + k_{12}Y_8Y_2 + k_{19}Y_5Y_5 - k_{20}Y_6Y_7, \\
 \frac{dY_7}{dt} &= k_5Y_6 - k_6Y_2Y_7 - k_7Y_1Y_7 + k_8Y_3Y_6 - k_{16}Y_{10}Y_7 - k_{17}Y_4Y_7 + k_{18}Y_3Y_5 + \\
 &\quad + k_{19}Y_5Y_5 - k_{20}Y_6Y_7 - k_{21}Y_2Y_7 + k_{22}Y_{10}Y_3 + k_{23}Y_4 - k_{24}Y_5Y_7, \\
 \frac{dY_8}{dt} &= k_9Y_5Y_2 - k_{10}Y_8 - k_{12}Y_8Y_2, \quad \frac{dY_9}{dt} = k_{12}Y_8Y_2, \\
 \frac{dY_{10}}{dt} &= k_{13}Y_2Y_5 - k_{14}Y_{10}Y_4 - k_{15}Y_{10}Y_5 - k_{16}Y_{10}Y_7 + k_{21}Y_2Y_7 - k_{22}Y_{10}Y_3, \\
 \frac{dY_{11}}{dt} &= k_{15}Y_{10}Y_5 + k_{16}Y_{10}Y_7.
 \end{aligned}$$

Коэффициент k в системе уравнений отвечает за скорость стадии химической реакции и вычисляется по следующей формуле:

$$k_i = A_i \cdot e^{\left(-\frac{E_i}{RT}\right)}.$$

Здесь A_i и E_i – предэкспоненциальный множитель и энергия активации каждой стадии реакции [4].

Для исследования пиролиза этан-метановых смесей при различных температурах стенок реактора мы включили в существующий осесимметричный 2D код [2] систему уравнений химической кинетики, описанную выше.

Мы рассматриваем течение в цилиндрическом реакторе при атмосферном давлении, длина 220 мм, радиус 10 мм (рис. 1). Исходная смесь поступает в трубу слева (метан) и по всему периметру трубы на расстоянии 5 мм (метан и этан). Общий расход 40 л/ч, температура втекающего газа 870 К.

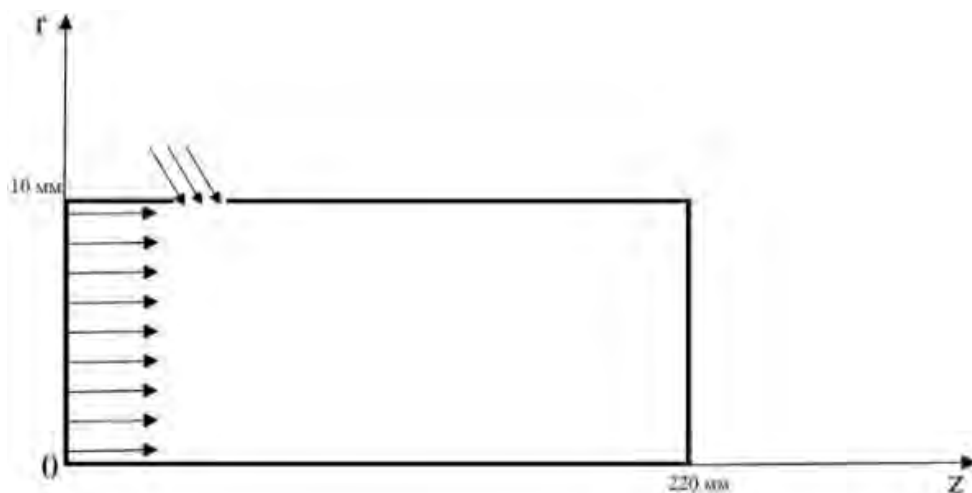


Рис. 1. Схема расчетной области

Нами проведены расчеты при разных составах смеси, втекающей по всему периметру трубы и разных температурах стенок. Из рисунков 2-3 видно, что с увеличением содержания этана в исходной смеси и повышением температуры стенок выход целевых продуктов (этилена, ацетилена, водорода) увеличивается. Исходное содержание метана при заданных температурах (1173 К, 1273 К) не меняет своего значения, так как при этих температурах он не активен. Таким образом, на продукты реакции разлагается этан и его процентное содержание влияет на выход целевых продуктов (рис. 2-3). Однако, при значении пристеночной температуры 1373 К, метан становится активным и его содержание на выходе устанавливается примерно на одном значении (рис. 4, г) независимо от исходного состава смеси. Это объясняется тем, что на расстоянии 5 мм поступает относительно холодная смесь из этана и метана, под воздействием нагрева в первой половине трубы разлагается этан с преимущественным образованием этилена (рис. 4, а), а так же водорода, ацетилена и метана (рис. 4, б, в, г). Во второй половине трубы газ разогревается до максимальных значений, происходит разложение метана с максимальными значениями по ацетилену и водороду. Массовые доли основ-

ных компонент смеси выравниваются, так как происходит разложение одного вещества – метана при постоянной температуре.

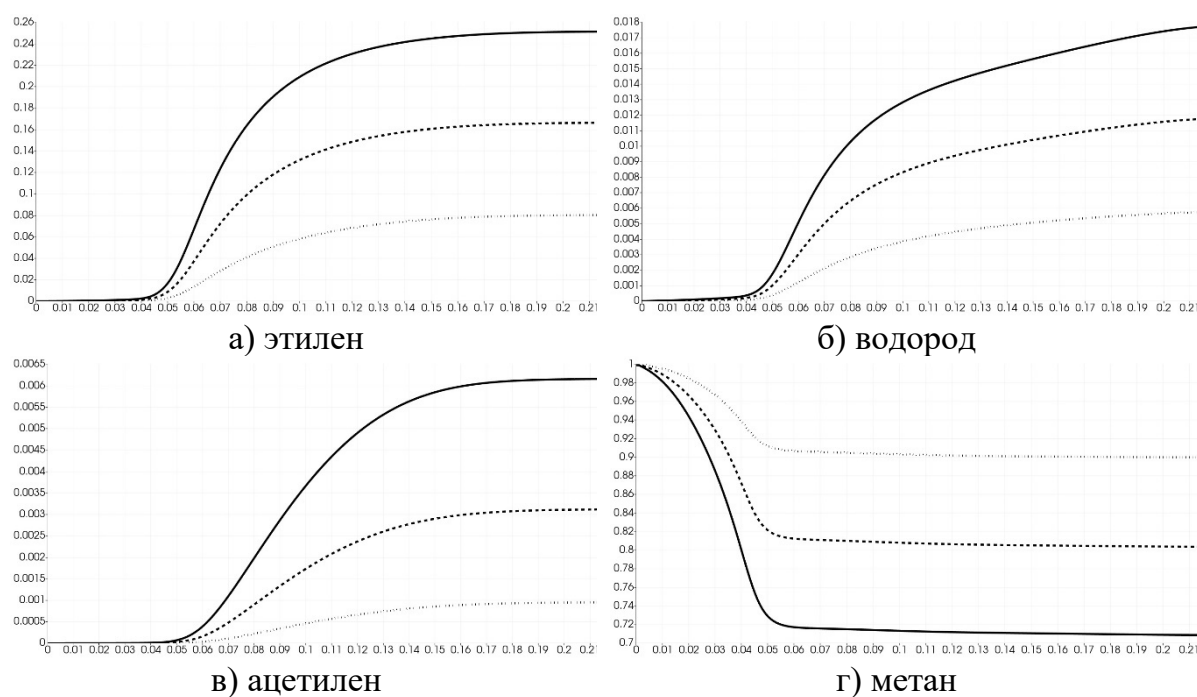


Рис. 2. Изменение массовых долей основных компонент смеси вдоль оси реактора, температура стенок 1173 К.
Сплошная линия – 70% метан, 30% этан; пунктирная линия – 80% метан, 20% этан; точки – 90% метан, 10% этан

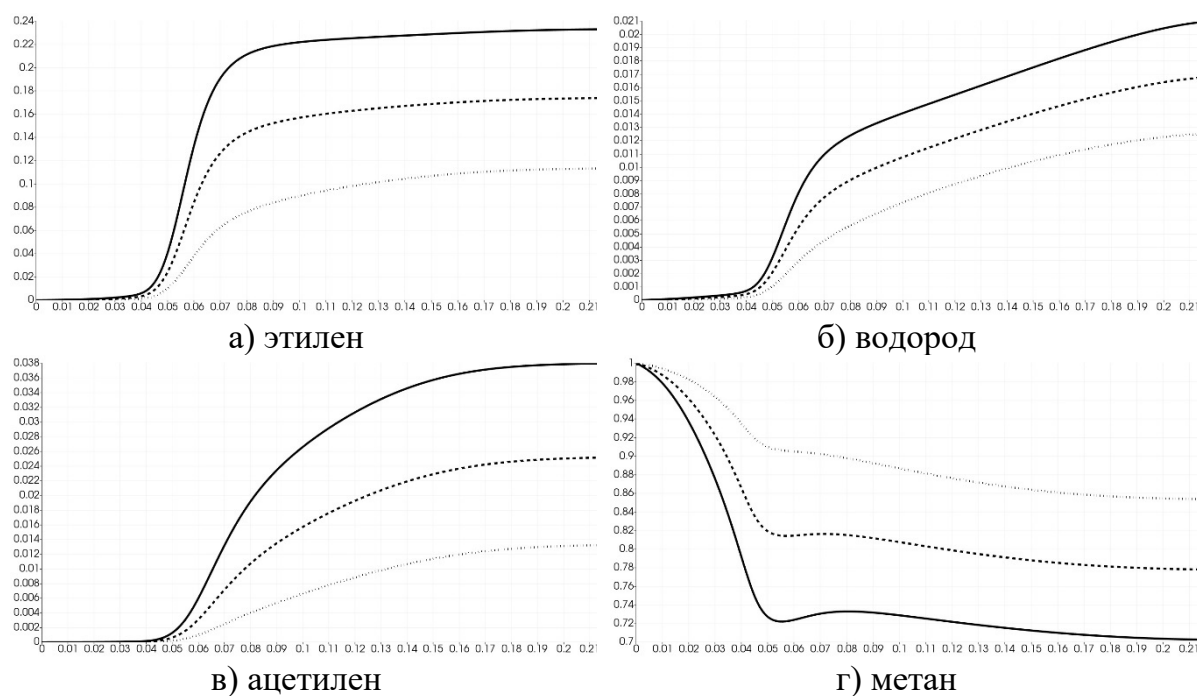


Рис. 3. Изменение массовых долей основных компонент смеси вдоль оси реактора, температура стенок 1273 К.
Сплошная линия – 70% метан, 30% этан; пунктирная линия – 80% метан, 20% этан; точки – 90% метан, 10% этан.

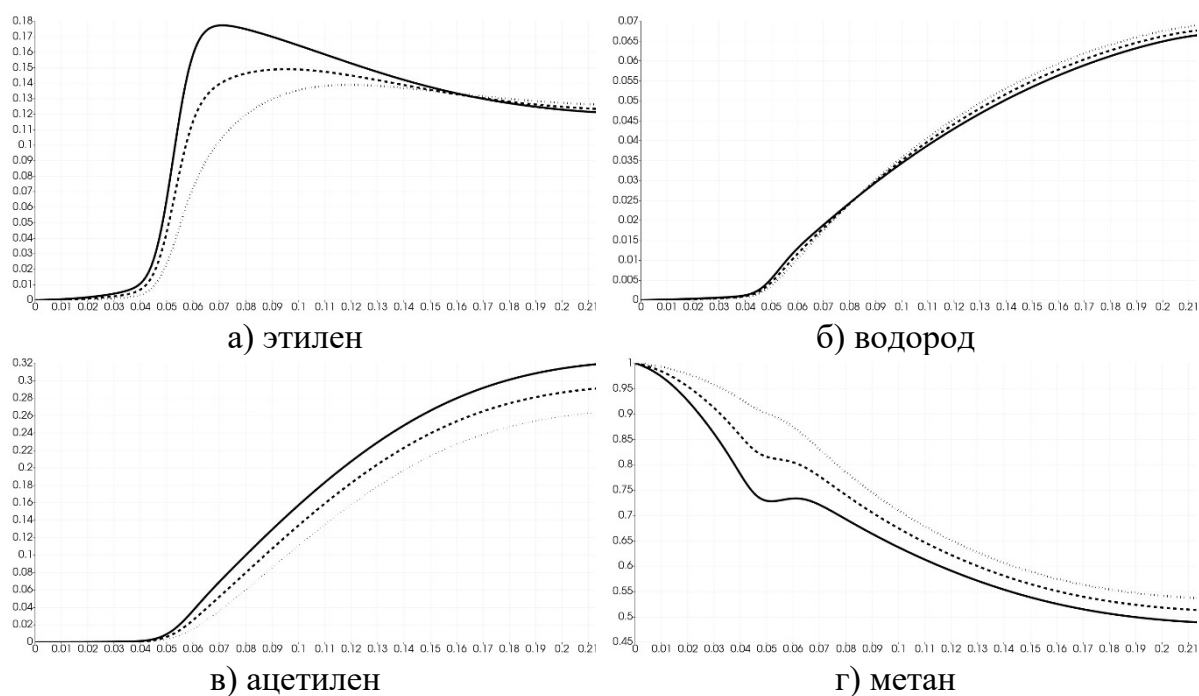


Рис. 4. Изменение массовых долей основных компонент смеси вдоль оси реактора, температура стенок 1373 К.

Сплошная линия – 70% метан, 30% этан; пунктирная линия – 80% метан, 20% этан; точки – 90% метан, 10% этан

Таким образом, в настоящей работе проведено исследование пиролиза углеводородных смесей при различных ее составах и температурах стенок. Сделан вывод, что разложение метана происходит при температурах выше 1273 К. При заданных составе, температуре и расходе исходной смеси, размеров реактора метан разлагается на ацетилен и водород.

Список литературы

1. Жалнин Р. В., Пескова Е. Е., Стадниченко О. А., Тишкин В. Ф. Моделирование течения многокомпонентного химически активного газа на примере пиролиза углеводородов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2017. № 101. С. 16.
2. Peskova E. E. Numerical modeling of subsonic axisymmetric reacting gas flows // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2057. P. 012071.
3. Day M. S., Bell J. B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combustion Theory and Modeling. 2000. Vol. 4. № 4. P. 535–556.
4. NIST Chemistry WebBook. URL: <http://webbook.nist.gov/chemistry/>.
5. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. 2nd edition. Springer Series in Comput. Math., 1996. Vol. 14.

О прохождении гамма-импульса сквозь атмосферу Земли

Владимир Андреевич Литвинов¹, Елена Владиславовна Кожемякина²

¹Барнаульский юридический институт Министерства внутренних дел
Российской Федерации, г. Барнаул, Россия

²Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия
¹lva201011@yandex.ru, ²elvk@mail.ru

Аннотация. Рассмотрено прохождение гамма-импульса космического происхождения сквозь атмосферу Земли. Проведено сравнение результатов моделирования методом Монте-Карло и представления соответствующих распределений с использованием разложения по кратностям комптоновского рассеяния. Показано, что учет первых двух актов комптоновского рассеяния гамма-квантов позволяет описать угловое и временное распределение квантов на поверхности Земли с точностью, достаточной для решения задач гамма-астрономии.

Ключевые слова: угловое распределение, гамма-источник, комптоновское рассеяние, временное распределение, разложение по поколениям

On propagation of gamma-pulse through the Earth atmosphere

Vladimir A. Litvinov¹, Elena V. Kozhemyakina²

¹Barnaul Law Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Barnaul, Russia

²Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia
¹lva201011@yandex.ru, ²elvk@mail.ru

Abstract. The passage of cosmic-ray gamma-pulse through the Earth atmosphere is considered. angular and time distribution of gamma quanta are computed. The results are compared with the Monte Carlo simulation data. It is shown that the account of only two first acts of Compton scattering yields description of the angular and temporal distributions of quanta on the Earth's surface with acceptable for gamma-astronomy accuracy.

Keywords: angular distribution, gamma source, Compton scattering, temporal distribution, generational decomposition

Введение

Размеры и формы изображений гамма-источников, получаемых наземными телескопами, определяются мало-угловой частью рассеянных при прохождении атмосферы и межзвездного пространства квантов. Данный факт позволяет надеяться получить приемлемую точность построения «изображения» гамма источника при учете только однократно и двукратно рассеянных квантов. Представление потоковых характери-

стик излучений на основе разложения по поколениям хорошо описано в научной литературе, например, [1].

Рассмотрим поток гамма-квантов энергии E_0 вертикально падающий на границу плоской изотермической атмосферы. Требуется определить угловое распределение вторичных квантов, достигших поверхности земли, а также распределение по времени задержки прихода вторичных квантов.

1. Угловые распределения

Поток нерассеянных гамма-квантов на поверхности земли определяется полным сечением их взаимодействия с атомами воздуха $\sigma^t(E_0)$:

$$\Phi_0 = I_0 \exp\left(-\sigma^t(E_0)p_0\right), \quad (1)$$

где p_0 – толщина атмосферы в г/см², I_0 – поток падающего на границу атмосферы излучения. При больших энергиях гамма-квантов процесс рассеяния описывается дифференциальным сечением Клейна-Нишины [2]. Конкурирующими процессами взаимодействия гамма-квантов с атомами воздуха являются поглощение за счет фотоэффекта, влияние которого особо заметным становится при энергиях менее 2 МэВ, и процесс образования электрон-позитронных пар, сечение которого в воздухе сравнивается с полным сечением комптоновского рассеяния при энергии около 20 МэВ.

Зависимость сечения поглощения гамма-квантов от энергии приводит к зависимости вероятности достичь поверхности земли после однократного рассеяния от угла рассеяния через связь энергии рассеянного кванта и косинуса угла рассеяния:

$$E(\mu) = E_0 / (1 + E_0(1 - \mu) / 0.511),$$

где μ – косинус угла рассеяния, а энергия кванта измеряется в МэВ.

Угловое распределение однократно рассеянных гамма-квантов можно записать, используя выражение (1) для нерассеянных квантов и дифференциальное сечение комптоновского рассеяния $W(E, \mu)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mu) &= I_0 \int_0^{p_0} \exp[-\sigma^t(E_0)p] W(E_0, \mu) \exp\left[-\frac{\sigma^t(E(\mu))(p_0 - p)}{\mu}\right] dp = \\ &= \frac{I_0 \mu W(E_0, \mu)}{\mu \sigma^t(E_0) - \sigma^t(E(\mu))} \left\{ \exp\left[-\sigma^t(E(\mu)) p_0 / \mu\right] - \exp\left[-\sigma^t(E_0) p_0\right] \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

Вторая экспонента в подынтегральном выражении соответствует вероятности того, что гамма квант, рассеявшийся на глубине атмосферы p (г/см²), долетит до поверхности земли без взаимодействия. Более сложный вид имеет выражение для двукратно рассеянных квантов.

Направление, имеющее косинус угла с вертикалью μ , гамма-квант может получить в результате двух актов рассеяния, если косинусы углов рассеяния μ_1 и μ_2 будут связаны соотношением:

$$\mu = \mu_1 \mu_2 - \cos \phi \sqrt{(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)}, \quad (3)$$

где $\cos \phi$ – косинус азимутального угла второго акта рассеяния. С учетом данного соотношения выражение для потока двукратно рассеянных квантов можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & I_0 \int_0^{p_0} dp \int_0^1 d\mu_1 \int_p^{p_0} \frac{dq}{\pi \mu_1} \int_0^1 d\mu_2 \frac{W(E_0, \mu_1) W(E_1, \mu_2)}{\sqrt{1 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu^2 + 2\mu\mu_1\mu_2}} \times \\ & \exp \left[-\sigma^t(E_0) p - \frac{\sigma^t(E_1)(q - p)}{\mu_1} - \frac{\sigma^t(E_2)(p_0 - q)}{\mu} \right] = \\ = & I_0 \int_0^1 d\mu_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\mu_2 \frac{W(E_0, \mu_1) W(E_1, \mu_2)}{\sqrt{1 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu^2 + 2\mu\mu_1\mu_2}} \frac{\mu}{\mu \sigma^t(E_1) - \mu_1 \sigma^t(E_2)} \times \\ & \times \left\{ \frac{\exp[-\sigma^t(E_2) p_0 / \mu] - \exp[-\sigma^t(E_0) p_0]}{\sigma^t(E_0) - \sigma^t(E_2) / \mu} - \right. \\ & \left. - \frac{\exp[-\sigma^t(E_1) p_0 / \mu_1] - \exp[-\sigma^t(E_0) p_0]}{\sigma^t(E_0) - \sigma^t(E_1) / \mu} \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Корень квадратный в выражении (4) необходим для учета связи (3) между углами рассеяния, приводящей к результирующему значению косинуса μ . Пределы интегрирования во внутреннем интеграле также определяются соотношением (3) из условия того, что значения $\cos \phi$ не могут по модулю превосходить единицу.

$$\alpha_{1,2} = \mu \mu_1 \pm \sqrt{1 + \mu^2 \mu_1^2 - \mu^2 - \mu_1^2}.$$

На рис. 1 приведены результаты расчетов по формулам (2) и (4) для энергии первичного кванта $E_0 = 100$ МэВ с учетом только комптоновского рассеяния. На этом же рисунке размещены результаты моделирования методом Монте-Карло с выделением потоков однократно и двукратно рассеянных квантов.

Сравнение результатов расчетов по формулам (2) и (4), представленных сплошными линиями на рисунках, и результатов моделирования методом Монте-Карло позволяет сделать вывод о хорошем согласии результатов, полученных обоими методами. Анализируя результаты, отно-

сящиеся к учету различного числа поколений, можно сделать выводы, что для косинусов $\mu > 0.95$ более 80% потока квантов формируется первыми двумя поколениями квантов. Это без учета нулевого поколения не рассеявшихся в атмосфере квантов.

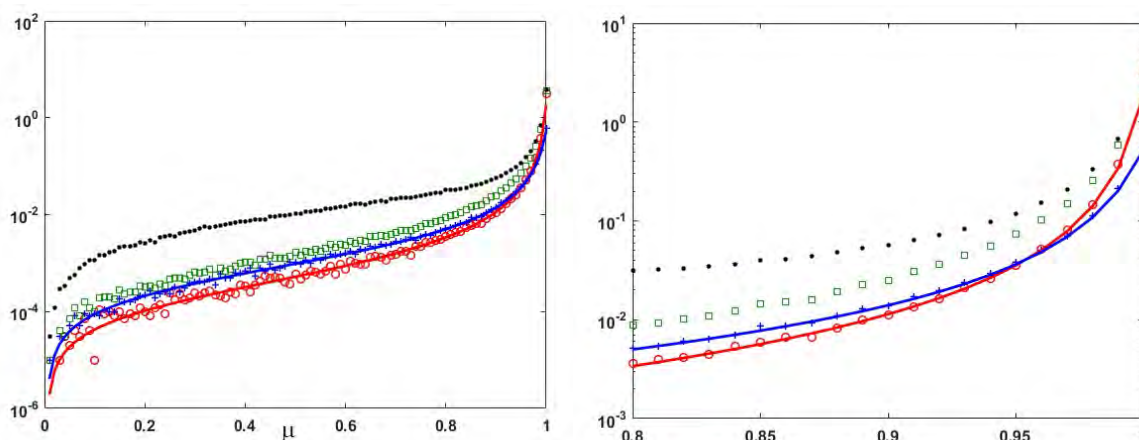


Рис. 1. Представление углового распределения по поколениям. Результаты Монте-Карло: $\circ$ – первое поколение, $+$ – второе поколение, $\square$ – 1+2 поколение, $*$ – все поколения. Линии – расчет по формулам

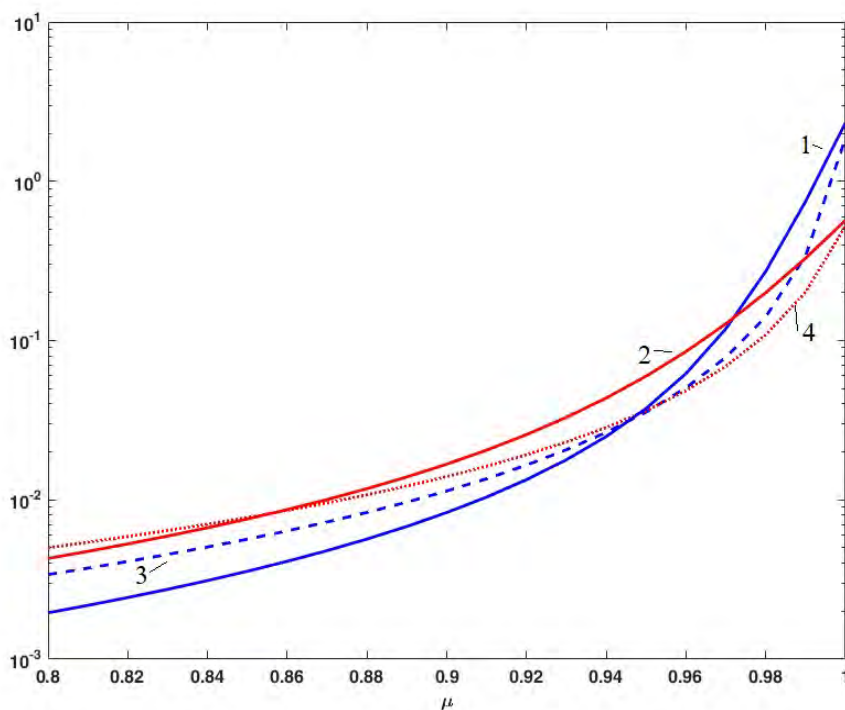


Рис. 2. Угловые распределения квантов. 1,2 – учитывается только эффект Комптона; 3,4 – учитываются все процессы взаимодействия квантов. 1,3 – первое поколение; 2,4 – второе поколение

Учет явлений фотоэффекта и образования электрон-позитронных пар приведет к уменьшению доли квантов, рассеявшихся на большие углы. Прямое аналоговое моделирование методом Монте-Карло с учетом

всех видов взаимодействия приводит к существенному падению статистической обеспеченности результатов, а в аналитических формулах требуется лишь заменить полное сечение комптоновского рассеяния на сумму полных сечений всех видов взаимодействий. На рис. 2 приведено сравнение формы углового распределения первых двух поколений гамма-квантов, полученных с учетом всех процессов и при учете только комптоновского рассеяния. Для удобства сравнения распределения, полученные с учетом всех видов взаимодействия, нормированы также, как и распределения, полученные только с учетом эффекта Комптона. Как и предполагалось ранее, учет всех видов взаимодействий приводит к увеличению доли квантов, достигающих поверхности земли под малыми углами.

2. Распределения по времени

Рассмотрим задачу определения числа квантов, приходящих на поверхность земли с запозданием на время τ по сравнению с приходом нерассеянных квантов. Как и в предыдущем случае воспользуемся разложением искомого распределения по поколениям квантов. Для определения высоты h (км) взаимодействия кванта, прошедшего путь p (г/см²) в атмосфере будем использовать соотношение, верное для изотермической атмосферы:

$$h = 7,4 \ln(p/p_0).$$

Время запаздывания гамма-квантов, испытавших однократное рассеяние и долетевших до поверхности земли без взаимодействия определяется выражением: $\tau = h(1/\mu - 1)/c$, где c – скорость света. Фиксированному времени запаздывания τ будет соответствовать множество актов рассеяния, в которых косинус угла рассеяния определяется приведенным выше равенством.

Поток однократно рассеянных квантов, достигающих поверхности земли с запаздыванием на время τ определяется выражением:

$$F_1 = I_0 \int_0^{p_0} \frac{c \mu^2 W(E_0, \mu)}{7.4 \ln(p_0/p)} \exp\{-\sigma^t(E_0)p - \sigma^t(E_1)(p_0 - p)/\mu\} dp, \quad (5)$$

$$\mu = \frac{7.4 \ln(p_0/p)}{c\tau + 7.4 \ln(p_0/p)}, \quad E_1 = E_0 / (1 + E_0(1 - \mu)/0.511). \quad (6)$$

Первый сомножитель в подынтегральном выражении записан с учетом перехода от распределения по косинусам угла рассеяния к распределению по временам запаздывания.

Учет второго поколения квантов приводит к более сложному выражению, приводящему к необходимости вычисления четырехкратного интеграла.

$$F_2 = I_0 \int_0^{p_0} dp \int_p^{p_0} dq \int_0^1 d\mu_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\mu_2 \frac{W(E_0, \mu_1) W(E_1, \mu_2)}{\sqrt{1 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu^2 + 2\mu\mu_1\mu_2}} \frac{c\mu^2}{7.4 \ln(p_0/q)} \times \\ \times \exp\left\{-\sigma^t(E_0)p - \sigma^t(E_1)(q-p)/\mu_1 - \sigma^t(E_2)((p_0-q)/\mu)\right\},$$

где $\mu = 1/[1 + (\tau + \tau_1)c/(7.4 \ln(p_0/q))]$, $\tau_1 = 7.4(1 - \mu_1) \ln(q/p)/(c\mu_1)$.

На рис. 3 приведены результаты расчета по формулам (5) и (7) в сопоставлении с аналогичными расчетами методом Монте-Карло. Из данных рисунка видно, что основной вклад в поток квантов, приходящих с задержкой до 1 мкс дают однократно рассеянные кванты. Для удобства сопоставления результаты, соответствующие учету всех процессов взаимодействия, гамма-квантов умножены на 10^{17} . Результаты моделирования методом Монте-Карло показывают, что учет остальных поколений рассеянных квантов практически не изменяют временные распределения в области $\tau < 1$ мкс.

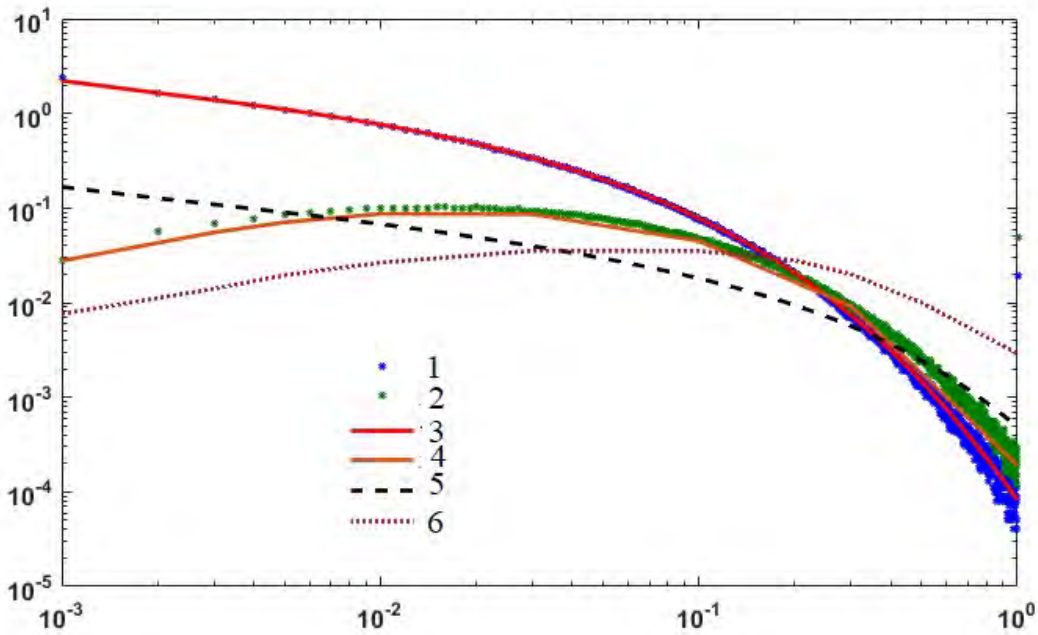


Рис. 3. Результаты моделирования задержки по времени. 1,2 – расчет методом Монте-Карло; 3,5 – формула (5); 4,6 – формула (6); 5,6 – расчет с учетом фотоэффекта и рождения пар (результаты умножены на 10^{17})

На рис. 4 приведена зависимость вероятности однократно рассеянных квантов долететь до поверхности земли. Начиная с энергии примерно 10 МэВ эта вероятность резко убывает с уменьшением энергии, так как при малых энергиях идет активное фотопоглощение, что приводит к более быстрому убыванию распределения по времени с ростом τ (см. например, потоки однократно рассеянных квантов первичных энергий 10 и 1 МэВ, приведенные на рис. 5).

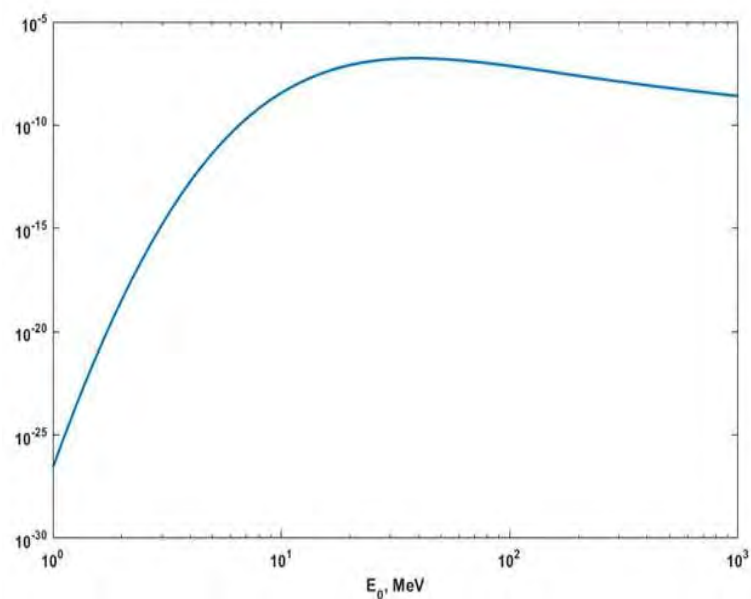


Рис. 4. Вероятность однократно рассеянных квантов пройти через атмосферу

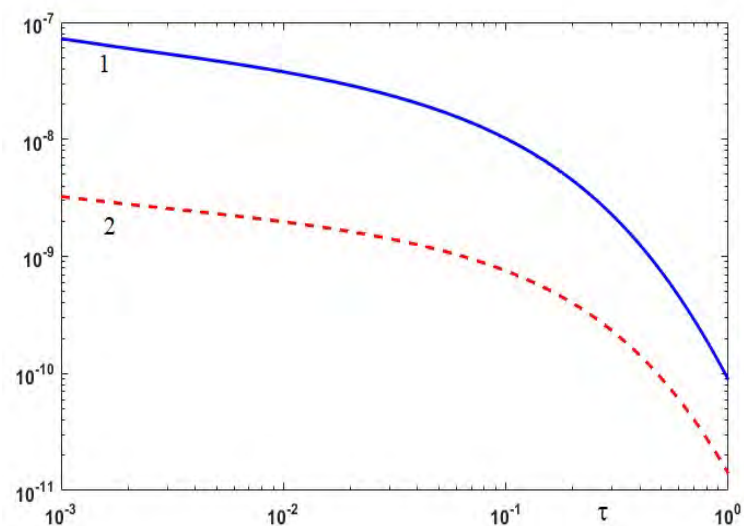


Рис. 5. Задержка по времени однократно рассеянных квантов.
1 – $E_0=10$ МэВ, 2 – $E_0 = 1$ МэВ

Закключение

Приведенные в работе результаты расчетов показывают, что для описания угловых и временных распределений вблизи направления оси пучка квантов достаточно учета только первых двух поколений рассеянных квантов. Угловое распределение в данном приближении представляется двукратным интегралом.

Список литературы

1. Фано У., Спенсер Л., Бергер М. Перенос гамма-излучения. М. : Госатомиздат, 1963. 284 с.

6. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

УДК 004.056

Математическая реализация нового статистического критерия, полученного заменой стандартных отклонений их оценками в классической формуле Эджуорта – Эдлтона – Пирсона

Татьяна Александровна Золотарева

Липецкий государственный педагогический университет
имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия
zolotarevatatyana2016@yandex.ru

Аннотация. Рост избыточности самокорректирующихся бинарных кодов должен приводить к повышению корректирующей способности, они обязывают синтезировать новые статистические критерии (комбинации минимумов и максимумов) и пытаться использовать их совместно, заменяя операторы вычисления минимума анализируемой последовательности на оператор вычисления максимума.

Ключевые слова: коэффициенты корреляции на малых выборках, шкала классической формулы, групповые корреляционные связи

A new statistical criterion obtained by replacing standard deviations with their estimates in the classical Edgeworth – Edleton – Pearson formula

Tat'yana A. Zolotareva

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky
University, Lipetsk, Russia
zolotarevatatyana2016@yandex.ru

Abstract. The increase in redundancy of self-correcting binary codes should lead to an increase in the correcting ability, which oblige to synthesize new statistical criteria (combinations of minima and maxima) and try to use them together, replacing the minimum calculation operators of the analyzed sequence with the maximum calculation operator.

Keywords: correlation coefficients on small samples, the scale of the classical formula, group correlations

От объема выборки исходных реальных данных существенно зависит разрешающая способность любого из известных статистических

критериев. Будем исходить из того, что функционал любого из 21-го известного статистического критерия проверки гипотезы независимости $r = 0.0$ может быть обобщена на иные случаи проверки иных гипотез попадания в иные интервалы $r = \{\pm 0.75, \pm 0.5, \pm 0.25, \pm 0.0\}$ по шкале классической формулы Эджуорта – Эдлтона – Пирсона (ЭЭП) для вычисления коэффициента корреляции для данных, полученных экспериментально [1].

Один из способов синтезировать новые критерии является модификация классической формулы ЭЭП критерия [2, 3]. В частности, мы можем заменить в классической формуле произведение стандартных отклонений на сумму квадратов мгновенных отклонений:

$$r_0(x, y) = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} \frac{(E(x) - x_i) \cdot (E(y) - y_i)}{(E(x) - x_i)^2 + (E(y) - y_i)^2}. \quad (1)$$

Проведенные исследования показали, что приемлемые результаты можно получить, заменив математические ожидания входных данных на их минимальные значения:

$$r_1(x, y) = 3.2 \cdot \left(-0.81 + \frac{2.4}{16} \sum_{i=1}^{16} \frac{(\min(x) - x_i) \cdot (\min(y) - y_i)}{(\min(x) - x_i)^2 + (\min(y) - y_i)^2} \right). \quad (2)$$

Так же следует отметить, что из-за расхождения шкал нового критерия (2) и классического критерия (1) используется их линейное совмещение. Появился масштабирующий коэффициент $3.2 \times 2.4 = 7.68$ и коэффициент смещения шкалы – 0.81. В общем случае каждый искусственный нейрон будет иметь свою собственную шкалу показателей нелинейно связанную с классической шкалой Эджуорта-Эдлтона-Пирсона. В простейшем случае бинарных нейронов нет необходимости синтезировать полную таблицу нелинейных связей, объединяемых нейронов (критериев). Достаточно линейно совместить шкалы в точке бинарного квантования.

По сравнению с большинством классических статистических критериев мы имеем значительное снижение коэффициентов равной корреляции эквивалентной симметричной матрицы (рис. 1).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0.39 \\ 0.75 & 1 & 0.37 \\ 0.39 & 0.37 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{0.75 + 0.39 + 0.37}{3} = 0.503 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.503 & 0.503 \\ 0.503 & 1 & 0.503 \\ 0.503 & 0.503 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Пример преобразования исходной асимметричной корреляционной матрицы в эквивалентную симметричную корреляционную матрицу для исследуемого семейства из трех ЭЭП искусственных нейронов

Из практики синтеза самокорректирующихся бинарных кодов [4] известно, что рост их избыточности должен приводить к росту их корректирующей способности. В нашем случае – это является прямым стимулом синтезировать новые статистические критерии и пытаться использовать их совместно. В связи с этим необходимо синтезировать новые статистические критерии [5].

$$r_2(x, y) = 3.2 \cdot \left(\frac{2.4}{16} \sum_{i=1}^{16} \frac{(\max(x) - x_i) \cdot (\max(y) - y_i)}{(\max(x) - x_i)^2 + (\max(y) - y_i)^2} - 0.81 \right). \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) слабо коррелированы между собой и слабо связаны с другими статистическими критериями, принадлежащими семейству ЭЭП.

Результаты численного эксперимента свидетельствуют о полной симметрии двух последних статистических критериев. В том числе полностью совпадают пороги их квантователей и повторяются вероятности их ошибок первого и второго рода $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0.323$. Коэффициенты корреляции двух последних критериев составляет $\text{corr}(r_1, r_2) = 0.38$, $\text{corr}(r, r_2) = 0.37$. Как результат корреляционная сцепленность симметричной корреляционной матрицы составляет -0.438.

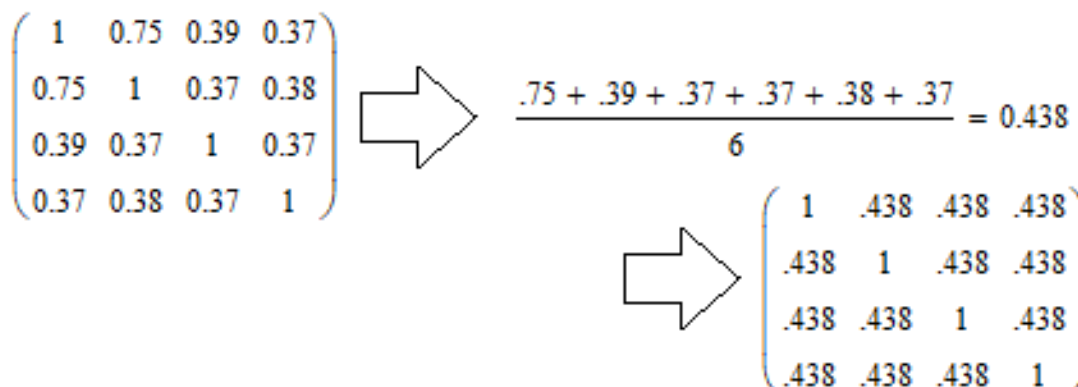


Рис. 2. Преобразование параметров асимметричной матрицы в ее симметричный аналог для четырех критериев семейства Эджуорта-Эдлтона-Пирсона

Два предыдущих варианта нейросетевых функционалов (2), (3) существенно независимы $\text{corr}(r_1, r_2) = 0.37$. Это позволяет пытаться комбинировать похожие по своей конструкции критерии. В нашем случае новый критерий мы можем получить, заменив в функционале (2), (3) операторы вычисления минимума, анализируемой последовательности на оператор вычисления максимума.

Например, мы можем использовать минимальные значения при обработке данных первой переменной «х» и максимальные значения при обработке второй переменной «у»:

$$r_3(x, y) = 3.2 \cdot \left(0.81 + \frac{2.4}{16} \sum_{i=1}^{16} \frac{(\min(x) - x_i) \cdot (\max(y) - y_i)}{(\min(x) - x_i)^2 + (\max(y) - y_i)^2} \right). \quad (4)$$

Перемена местами применения этих функционалов мы получаем еще один функционал:

$$r_4(x, y) = 3.2 \cdot \left(0.81 + \frac{2.4}{16} \sum_{i=1}^{16} \frac{(\max(x) - x_i) \cdot (\min(y) - y_i)}{(\max(x) - x_i)^2 + (\min(y) - y_i)^2} \right). \quad (5)$$

Проверенные экспериментальным путем два новых функционала по статистическим распределениям полностью тождественны между собой и по отношению двум предыдущим критериям. Для всех четырех критериев пороги квантователей одинаковы и все нейроны дают одинаковые вероятности ошибок первого и второго рода $P1 \approx P2 \approx PEE \approx 0.323$. Однако корреляция откликов этих двух новых функционалов оказывается низкой $\text{corr}(r_3, r_4) = 0.16$. Более того, новые функционалы имеют крайне низкие коэффициенты корреляции и со всеми ранее рассмотренными функционалами семейства критериев ЭЭП.

В связи с этим нижний левый угол корреляционной матрицы (рис. 3) имеет малые значения модулей ее элементов, находящихся вне диагонали:

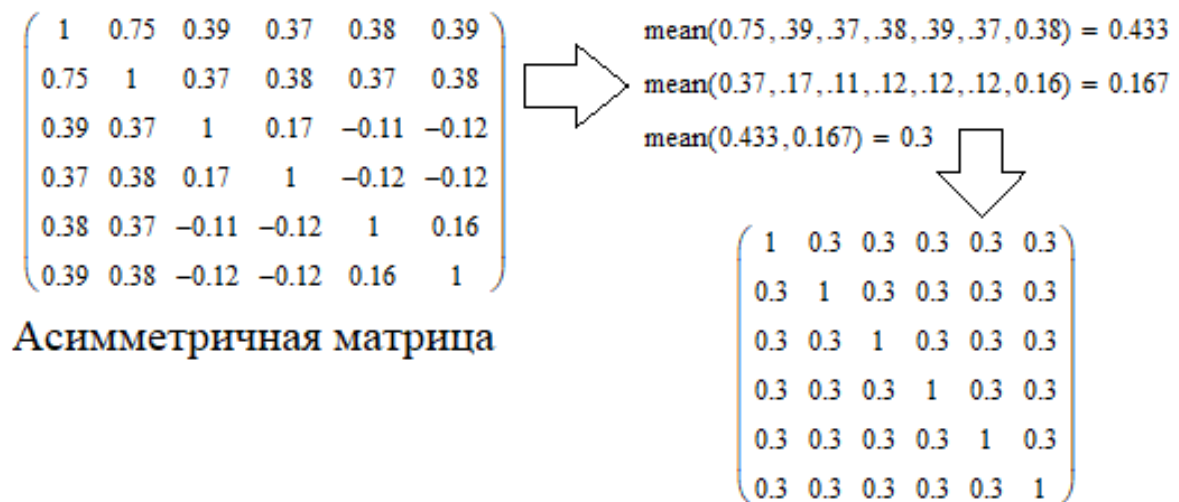


Рис. 3. Симметризация корреляционной матрицы группы из шести критериев семейства искусственных нейронов Эджуорта-Эдлтона-Пирсона

Как результат мы получаем рост размерности задачи при одновременном снижении показателя корреляционной сцепленности данных с 0.503 до 0.438, примерно на 15%. Формально у, соответствующей, нейросетевой конструкции растет кодовая избыточность при одновре-

менном росте устойчивости вычислений, используемых при обнаружении и корректировке ошибок.

Список литературы

1. Zolotareva, T. A., Ivanov A. I. Statistical Characteristics of Decisions Made by a Neural Network Molecule with Quadrant Quantization and a Molecule with Data Quantization by Two Ellipses // Software Engineering Perspectives in Intelligent Systems Proceedings of 4th Computational Methods in Systems and Software. 2020. Vol. 1 (Q3).

2. Золотарева Т. А. Аналоги корреляционного критерия Пирсона // Информатика и вычислительная техника и управление. Серия: Естественные и технические науки. 2021. № 4. С. 90–97.

3. Volchikhin V. I., Ivanov A. I., Zolotareva T. A., Skudnev D. M. Synthesis of four new neuro-statistical tests for testing the hypothesis of independence of small samples of biometric data // Journal of Physics: Conference Series. 2021. P. 52072.

4. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования М. : Техносфера, 2007. 320 с.

5. Малыгина Е. А. Биометрико-нейросетевая аутентификация: перспективы применения сетей квадратичных нейронов с многоуровневым квантованием биометрических данных : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 114 с.

Методы обучения в задачах обнаружения и исправления ошибок

Николай Витальевич Сафронов¹, Юлия Фридриховна Захарова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

^{1,2}olegzakharov@rambler.ru

Аннотация. Приводятся основные понятия, связанные с обучением нейронных сетей в задачах обнаружения и исправления ошибок кода. Основное внимание уделяется алгоритму обратного распространения ошибки, его частному случаю – методу упругого распространения и генетическому алгоритму. Приводится модельный пример.

Ключевые слова: нейронная сеть, поиск ошибок, исправление ошибок

Learning methods in problems of error detection and correction

Nikolay V. Safronov¹, Yuliya F. Zakharova²

Penza State University, Penza, Russia,

^{1,2}olegzakharov@rambler.ru

Abstract. The basic concepts related to the training of neural networks in the problems of detecting and correcting code errors are given. The main attention is paid to the error backpropagation algorithm, its special case - the elastic propagation method and the genetic algorithm. A model example is given.

Keywords: neural network, error search, error correction

В последнее время нейросеть является распространенным инструментом решения нестандартных задач, многие из которых долгое время считающихся неразрешимыми.

В настоящий момент разработано огромное количество методов обучения нейронных сетей (НС). Особо стоит выделить метод обратного распространения ошибки, метод упругого распространения, а также генетический алгоритм, которые приводятся в данной бакалаврской работе. Данные методы позволяют решать разного рода задачи, в том числе и те, что направлены на поиск и исправление ошибок.

Обучение НС, согласно методу обратного распространения ошибки, можно записать следующей последовательностью шагов.

1. Случайным образом инициализируются веса (чаще всего в качестве весовых значений берутся числа из области $[-0,5; 0,5]$).

2. Затем происходит циклическое выполнение шагов 3-10 до тех пор, пока ошибка вычислений превышает некоторое наперед заданное значение

3. Для всех пар данных последовательно проходят по шагам 4-9.

Распространение данных от входов к выходам.

4. Каждый из поступающих на вход нейронов ($X_i, i = 1, 2, \dots, n$) пересылает сигнал X_i на следующий слой, который в данном случае является скрытым, посылаемые импульсы перемножаются на весовые значения.

5. Затем для всех скрытых нейронов ($Z_j, j = 1, 2, \dots, p$) происходит процесс суммирования получаемых сигналов: $Z_{sj} = \sum_{i=1}^n X_i V_{ij}$. Получив-

шаяся сумма становится аргументом активационной функции: $Z_j = f(Z_{sj})$. Получившееся значение становится выходным и отправляется к другому слою (в данной задаче являющимся выходным).

6. На каждом нейроне выходного слоя ($Y_k, k = 1, 2, \dots, m$) осуществляется суммирование входных сигналов: $Y_{Sk} = \sum_{j=1}^n Z_j W_{jk}$. Также, как и

для предыдущего слоя, к полученной сумме функции применяют функцию активации, рассчитывается значение выходящего сигнала: $Y_k = f(Y_{Sk})$.

Обратное распространение ошибки

В ходе данного этапа происходит обратный шаг, веса корректируются с целью минимизации величины ошибки

7. Любой из выходящих нейронов ($Y_k, k = 1, 2, \dots, m$) выдает значение, полученное после обучения НС. Затем вычисляется значение ошибки, рассчитывается значение корректировки: $\sigma_k = (T_k - Y_k) f'(Y_{Sk})$, после этого получают величину изменения веса: $W_{jk} : \Delta W_{jk} = \alpha \cdot \sigma_k \cdot Z_j$. Кроме того, подсчитывается значение корректировки: $\Delta W_{0k} = \alpha \cdot \sigma_k$. Величина σ_k отправляется к нейронам на предыдущие слои для вычисления значений корректировок весовых функций.

8. Все нейроны скрытого слоя ($Z_j, j = 1, 2, \dots, p$) получают значения ошибок от последующих слоев, рассчитывается сумма корректировок:

$\sigma_{Sk} = \sum_{k=1}^n \sigma_k \cdot W_{jk}$. Следующим шагом умножают величину ошибки на

значение производной от функции активации: $\sigma_j = \sigma_{Sk} \cdot f'(Z_{Sk})$, рассчитывают величину изменения веса $V_{ij} : \Delta V_{ij} = \alpha \cdot \sigma_j \cdot x_i$. Также получают корректировку смещения: $V_{0j} = \alpha \cdot \sigma_j$.

9. Изменяются веса связи между выходными и скрытыми нейронами, а также скрытыми и входными. Веса рассчитываются соответ-

ственно по следующим формулам: $W_{jk}(new) = W_{jk}(old) + \Delta W_{jk}$ ($Y_k, k = 1, 2, \dots, m$) и $V_{ij}(new) = V_{ij}(old) + \Delta V_{ij}$ ($Z_j, j = 1, 2, \dots, p$).

- Рассчитывается результирующее значение квадратичной ошибки, на основании величины которой алгоритм прекращает работать или переходить на новую итерацию. В качестве условия для прекращения вычислений может выступать условие, что результирующая квадратичная ошибка приняла минимальное значение или же стала меньше какого либо заданного значения ϵ ;

Метод упругого распространения является некоторой модификацией алгоритма обратного распространения ошибки, метод получил название Rprop. Реализация данного алгоритма позволила убрать главную проблему алгоритма обратного распространения ошибки – избыточные затраты по времени. Алгоритм предусматривает использование знаков частных производных с целью поиска весов.

В основу генетического алгоритма (рис. 1) положен метод эволюций, который заключается отборе наиболее подходящих для данной задачи вариантов.

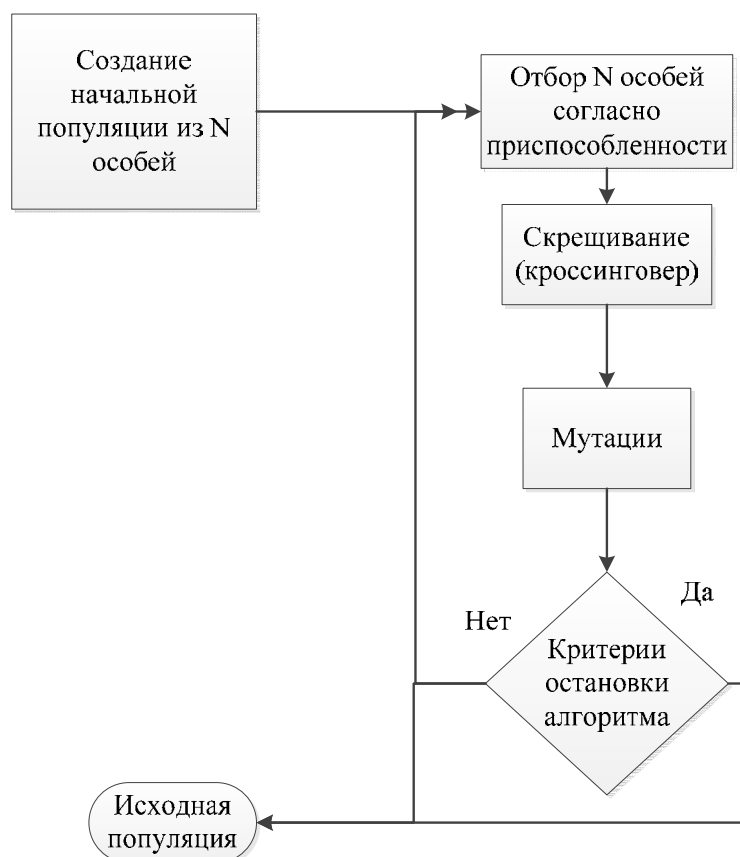


Рис. 1. Блок-схема работы генетического алгоритма

Генетические алгоритмы обладают следующими особенностями;

- происходит обработка не самих параметров, а некоторой их кодировки;

- алгоритм относится к стохастическим;
- в процессе вычислений не используется производная, что позволяет понизить ограничения на целевую функцию;
- решение ищется в некотором определенном множестве.

В задачах, решаемых генетическими алгоритмами, одним из основных вопросов является подбор области, в которой ищется решение.

На рис. 2 представлена структура нейросети, которую в дальнейшем использовалась для описания работы генетического алгоритма.

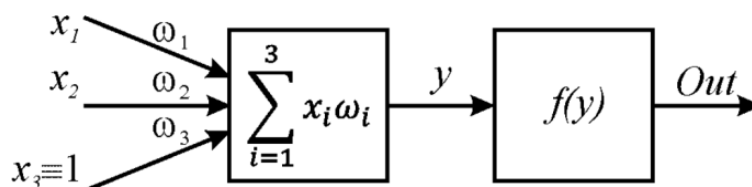


Рис. 2. Структура нейронной сети

Пусть в некоторой нейросистеме функция активации задана следующим образом:

$$Out = \frac{1}{1 + e^{-y}}.$$

Для поиска решения требуется подобрать весовые коэффициенты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, чтобы для входных сигналов x_1 и x_2 в результате обучения были бы получены сигналы "0" или "1". Из рис. 2 видно, что для данной НС выходной результат Out принимает требуемое значение лишь для $|y| \rightarrow \infty$.

Обучение можно считать успешным, если величина $Out > 0,5$ для $T = 1$ или же $Out < 0,5$ при $T = 0$. График функции активации НС представлен на рис. 3.

В качестве точек для графика на рис. 3 пары подаваемых на вход векторов. Условимся, что в точке с координатами (1,1) выходное значение $Out > 0,5$, в точках (0,0), (0,1), (1,0) $Out < 0,5$. Если же $Out = 0,5$, то справедливо следующее выражение:

$$y = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \omega_3 = 0.$$

На рис. 4 представлен график прямой $y = 0$, разграничивающий обучающие пары на 2 типа: $Out < 0,5$ и $Out > 0,5$.

Все обучение сводится к такому подбору весовых коэффициентов $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, чтобы функция $y = 0$ осуществляла деление всех точек на 2 группы, как представлено на графике (рис. 4).

Обучение НС с обратным распространением ошибки – одна из наиболее интересных и популярных отраслей в исследовании нейростей.

Генетический алгоритм представляет некоторый симбиоз стохастических и градиентных методов поиска экстремума функций. Комбинируя вероятностные характеристики мутаций, кроссингвера достаточно быстро можно достичь минимума.

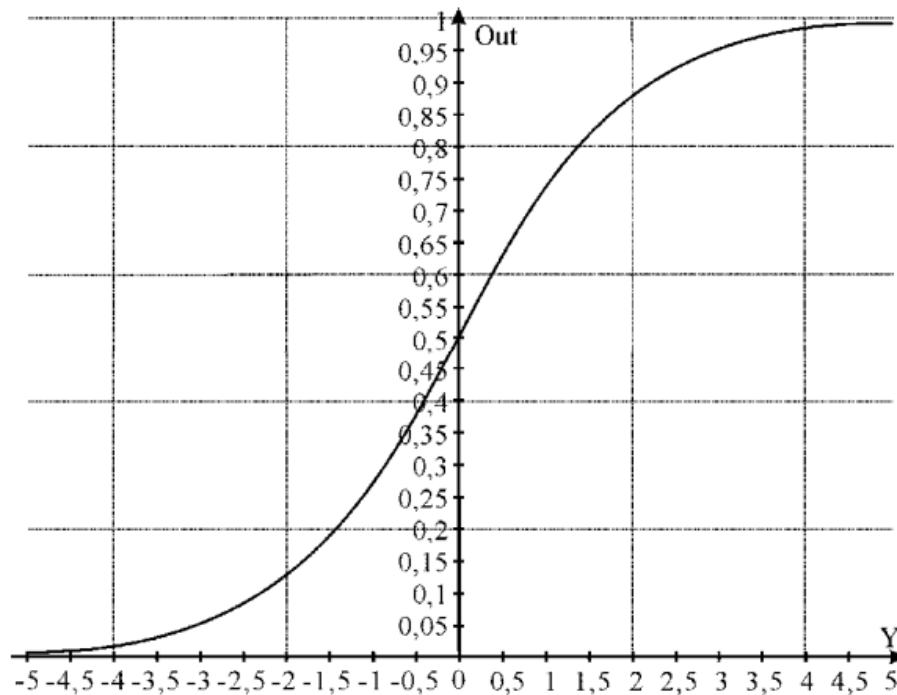


Рис. 3. График функции активации нейросети

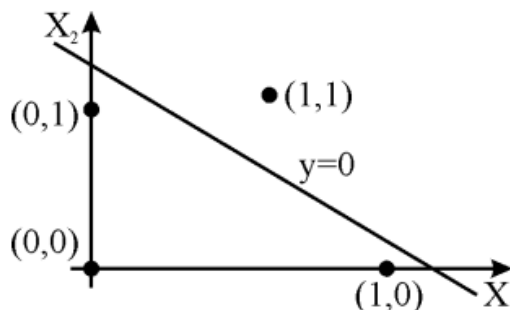


Рис. 4. Разграничение входных векторов обучающих пар на 2 категории

Список литературы

1. URL: <https://otus.ru/nest/post/1592/>
2. URL: <https://docplayer.com/109744123-Ris-1-perseptron-v-obshchem-vide.html>
3. URL: https://bigenc.ru/technology_and_technique/text/4114009
4. URL: <https://intuit.ru/studies/courses/88/88/lecture/20527?page=4>
5. URL: <https://lektcii.org/12-28326.html>
6. URL: http://synset.com/ai/ru/nn/NeuralNet_01_Intro.html V Co

**Перспективы перехода от использования
бинарных искусственных нейронов к использованию
троичных нейронов в сцепке с избыточными
кодами обнаружения и исправления ошибок**

Константин Николаевич Савинов¹, Роман Викторович Еременко²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹knsavinov@mail.ru, ²rim7575@mail.ru.

Аннотация. Показано, что троичный самокорректирующийся выходной код нейронной сети по его корректирующей способности является в полтора раза мощнее в сравнении с его бинарным аналогом. Последнее объясняется ростом объема доступной для анализа информации и большей информативностью данных о синдромах ошибок. Сделано предположение о том, что эффект усиления роста корректирующей способности троичных нейронов по сравнению с двоичными нейронами будет усиливаться по мере роста числа искусственных нейронов, объединяющих для совместного использования известные сегодня статистические критерии. Значительное преимущество искусственных многослойных нейронных сетей над классическими кодами с обнаружением и исправлением ошибок обусловлено тем, что нейронные сети в момент обучения способны учитывать реальные распределения многомерных вероятностей биометрических данных, тогда как все классические коды с обнаружением и исправлением ошибок строились на гипотезе равновероятного распределения ошибок. Рассмотрены перспективы перехода от использования бинарных искусственных нейронов к троичным.

Ключевые слова: троичные нейроны, бинарные искусственные нейроны, нейронные сети, квантователи

**Prospects for moving from the use of binary artificial neurons
to the use of ternary neurons coupled with redundant
error detection and correction codes prospects
for the transition from the use of binary artificial neurons
to the case of the appearance of ternary neurons in conjunction
with redundant error detection and error codes**

Konstantin N. Savinov¹, Roman V. Eremenko²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹knsavinov@mail.ru, ²rim7575@mail.ru.

Abstract. It is shown that the ternary self-correcting output code of the neural network is one and a half times more powerful than its binary counterpart in its correcting power. This is explained by the growth of the amount of information available

for analysis and the greater informativity of the error syndromes data. The assumption is made that the effect of growth of correction ability of ternary neurons in comparison with binary neurons will increase as the number of artificial neurons combining known statistical criteria increases. A significant advantage of artificial multilayer neural networks over the classical codes with the detection and correction of errors is that neural networks at the time of training are able to take into account the real distribution of multivariate probabilities of biometric data, while all of the classical codes with the detection and correction of errors were built on the hypothesis of equal probability distribution of errors. The prospects of transition from the use of binary artificial neurons to ternary ones are considered.

Keywords: ternary neurons, binary artificial neurons, neural networks, quantisators

В настоящее время ведется активная работа по использованию биометрических данных граждан при допуске их к электронным государственным и частным ресурсам, платежным системам, хранилищам данных и т.п., размещенным в открытой информационной среде, например, сети интернет. При этом хочется отметить, что появление больших систематизированных массивов данных, включающих персональные или иные данные граждан, представляет лакомый кусок для злоумышленников [1].

Разработанные в период с 2004 по 2013 гг. национальные стандарты позволили Российской Федерации занять лидирующие позиции в мире по регламентированию использования больших нейронных сетей в вопросах защиты информации. На сегодняшний день таких стандартов нет ни в одной из ведущих стран Евросоюза, ни в США или Китае.

Работы по развитию нейронных сетей в нашей стране ведутся непрерывно и сейчас методы обработки биометрических данных, разработанные в России, в целях дальнейшего совершенствования подвергаются пересмотру. Опыт использования сетей бинарных нейронов показал, что в соотношении с вероятностями появления различного рода ошибок при кодировании значительно снижается качество принимаемых такой сетью решений.

Из проведенного анализа видно, что одним из значительных факторов, влияющих на подобное поведение такой нейросети является низкая «эффективность» использования данных в области перехода состояния бинарного нейрона, так как в эту группу попадают биометрические параметры с низкой уникальностью, характерные для среднестатистических биометрических данных.

Это является логичным, так как области уникальных составляющих биометрических данных имеют большие значениями модулей математических ожиданий параметров и как следствие более значимые весовые коэффициенты нейронов, и в тоже время составляющие параметров с математическими ожиданиями, попадающими интервал среднестатистических имеют малые модули весовых коэффициентов нейронов.

Одним из способов повышения «эффективности» использования области среднестатистических биометрических данных является замена бинарных нейронов на троичные, которая дает возможность получать новые результаты, позволяющие обеспечить более высокий уровень защиты информации и разграничения доступа к ней, как в закрытых (локальных) информационных системах, так дистанционно в открытой информационной среде интернет. [2]

По сравнению с двоичными нейронами у троичных усиливается коррелирующая способность по мере роста числа искусственных нейронов, объединяющих для совместного использования известные сегодня статистические критерии.

Принцип данного подхода заключается в том, что бинарные выходные квантователи трех бинарных нейронов мы можем заменить на троичные квантователи, обеспечивающие каждому искусственному нейрону три выходных состояния «-1», «0», «+1» с теми же самыми порогами квантования.

Формально, три троичных нейрона будут давать выходной код с шестью битами, вместо трех бит у бинарных нейронов, что удваивает его избыточность. Если перейти к спектру расстояний Хэмминга через подсчет суммы состояний разрядов кодов, то мы получим данные, приведенные на рисунке 1.

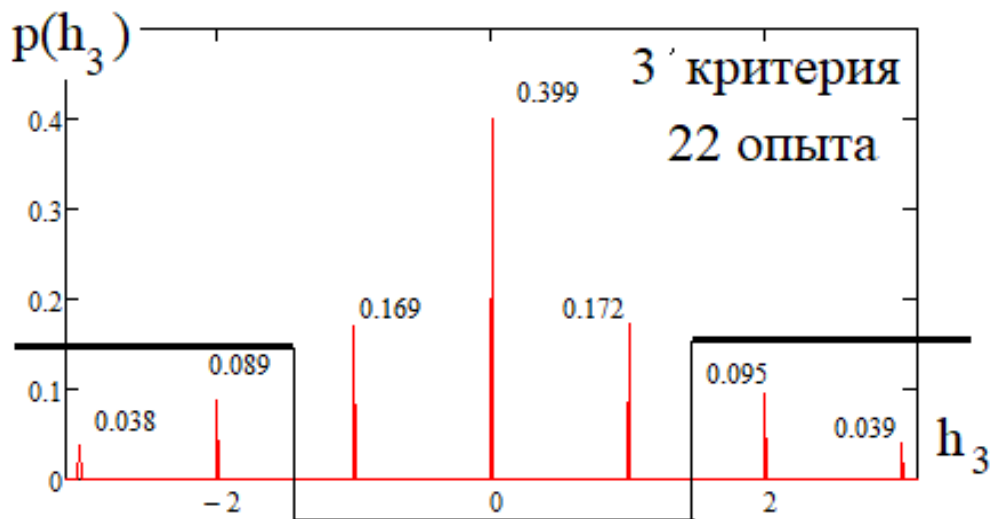


Рис. 1. Спектр амплитуд вероятности расстояний Хэмминга для трех троичных нейронов

Троичный код с обнаружением и исправлением ошибок можно получить, если делить три центральных линии спектра Хэмминга по модулю три и четыре боковых линии. Этот троичный самокорректирующийся код является более мощным по сравнению с бинарным, так как ис-

правляет примерно 9.4% ошибок и обеспечивает доверительную вероятность 0.746. [3]

Если программно воспроизвести 21 статистический критерий и соотносящиеся им троичные нейроны, то в результате спектр значений будет представлять собой 40 значимых линий расстояний Хэмминга.

Пример такого спектра приведен на рисунке 2.

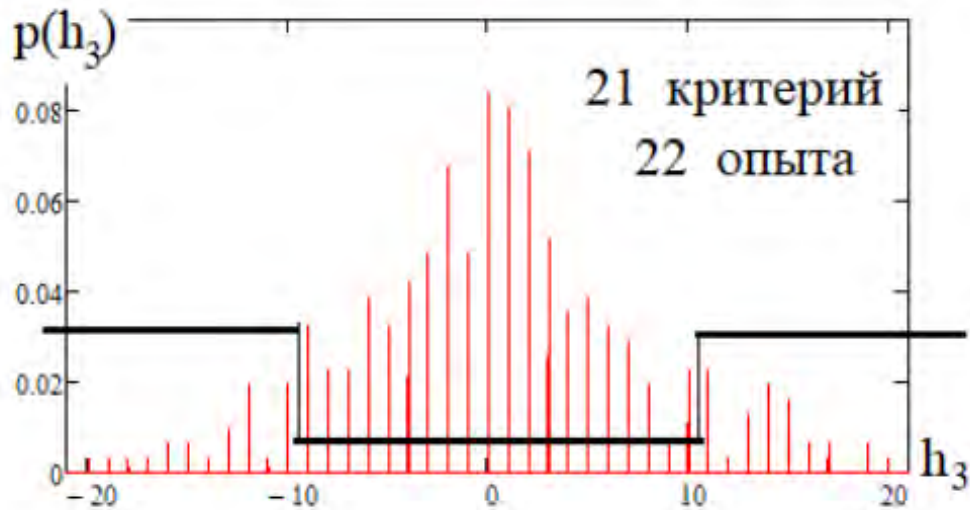


Рис. 2. Спектр линий расстояний Хэмминга 21 троичного нейрона

В результате достаточное усложнение спектра, подвергаемого анализу, позволяет создавать самокорректирующуюся кодовую конструкцию, способную находить и исправлять немногим менее трети от общего количества ошибок, возникающих в этой кодовой конструкции. Сеть всего из 21 искусственного троичного нейрона позволяет достигать доверительной вероятности 0.878, что уже является достаточно близким значением к предъявляемым в реальных системах требованиям. Предполагается, что дальнейшее математическое усложнение конструкции приведет к повышению эффективности функционирования искусственной нейронной сети.

Заключение

Результаты проведенных исследований показали, что троичные нейроны на тех же исходных данных являются более эффективными в сравнении с бинарными нейронами.

При дальнейшем исследовании и повышении сложности нейронов, разработки пятэричных и семэричных нейронов прогнозируется многократное увеличение корректирующей способности кодовых конструкций, что в свою очередь повышает достоверность, надежность и безопасность нейронных систем, обрабатывающих биометрические данные.

Список литературы

1. Малыгина Е. А. Биометрико-нейросетевая аутентификация: перспективы применения сетей квадратичных нейронов с многоуровневым квантованием биометрических данных : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 114 с.
2. Волчихин В. И., Иванов А. И., Назаров И. Г., Фунтиков В. А., Язов Ю. К. Нейросетевая защита персональных биометрических данных. Москва : Радиотехника, 2012. 160 с.
3. Иванов А. И. НейроДинамика: гиперускорение направленных переборов или повышение достоверности статистических оценок на малых выборках : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. 106 с.
4. ГОСТ Р 52633.5–2011. Защита информации. Техника защиты информации. Автоматическое обучение нейросетевых преобразователей биометрия-код доступа. М., 2011.

Применение метода глубокого Q-обучения для обучения агентов в логических играх

Максим Олегович Тимошкин¹, Елена Геннадьевна Романова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹max.timoshkin@inbox.ru, ²math@pnzgu.ru

Аннотация. Обучение с подкреплением – активно развивающаяся область машинного обучения, которая позволяет эффективно обучать ботов в логических играх. DQN является одним из хорошо зарекомендовавших себя подходов в этой области. В данной работе метод DQN был применен к усложненной версии игры крестики-нолики и прорыв. Был предложен подход для симуляции среды, который позволяет эффективнее использовать вычислительные ресурсы для обучения. Использование этого фреймворка показало, что практически без настройки гиперпараметров можно добиться высокого качества игры, а также даны численные оценки эффективности обучения.

Ключевые слова: обучение с подкреплением, глубокое Q-обучение, Q-функция, уравнения Беллмана, логические игры

Application of the deep Q-learning method for training agents in logic games

Maksim O. Timoshkin¹, Elena G. Romanova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹max.timoshkin@inbox.ru, ²math@pnzgu.ru

Abstract. Reinforcement learning is an actively developing area of machine learning that allows to effectively train bots in logic games. DQN is one of the well studied approaches in this area. In this paper, DQN was applied to a more complex version of a tic-tac-toe game and breakout. In this paper we developed a novel framework which allows us to simulate environments more efficiently using the same amount of computational resources. Using this framework, it was shown that with no adjustment of hyperparameters it is possible to achieve a high quality of the bots. Numerical estimations of the effectiveness of training process were also provided.

Keywords: reinforcement learning, deep Q-learning, Q-function, Bellman equation, logic games

Введение

В последние годы искусственный интеллект (ИИ) меняет все сферы жизни людей. ИИ представляет собой широкомасштабный инструмент, который позволяет людям переосмыслить то, как они интегрируют информацию, анализируют данные и используют полученные знания для улучшения процесса принятия решений [1, 2].

Машинное обучение – обширный подраздел искусственного интеллекта, изучающий методы построения алгоритмов, способных обучаться [3].

Существует множество подразделов машинного обучения. Обучение с подкреплением – один из подразделов машинного обучения, в котором изучается, как испытуемая система (агент) обучается, взаимодействуя с некоторой средой, пытаясь максимизировать некоторый долгосрочный выигрыш [4]. В работе был рассмотрен один из алгоритмов обучения с подкреплением – deep Q-learning (DQN).

Постановка задачи обучения с подкреплением

Пусть агент действует в среде. Среда описывается состояниями $s \in S$, где S – множество допустимых состояний, определяемых средой. Агент в каждый момент времени t совершает действие $a \in A$, A – множество допустимых действий в текущем состоянии s .

Введем обозначения:

$\pi(a|s)$ – политика агента – распределение вероятностей для каждого состояния s на множестве действий a ;

$p(s'|s, a)$ – динамика среды, определяющая переход в новое состояние s' в случае, если агент совершил действие a , находясь в состоянии s ;

$r(s, a)$ – награда, получаемая агентом при совершении действия a в состоянии s ;

$\tau = \{s_0, a_0, r_0, s_1, a_1, r_1, s_2, a_2, r_2, \dots\}$ – траектория взаимодействия агента со средой;

$$p(\tau|\pi) = p(s_0) \cdot \prod_{t=0}^{\infty} \pi(a_t|s_t) \cdot p(s_{t+1}|s_t, a_t) - \text{вероятность траектории } \tau$$

при фиксированной политике π ;

$$R_t = r_t + \gamma \cdot r_{t+1} + \gamma^2 \cdot r_{t+2} + \dots = \sum_{k=t}^{\infty} \gamma^{k-t} \cdot r_k, \gamma \in [0, 1) - \text{кумулятивная}$$

награда, получаемая с момента времени t ;

γ – коэффициент дисконтирования, уменьшающий кумулятивную награду за каждый пройденный шаг времени t ;

$$E_{p(\tau, \pi)} (R_0) \rightarrow \max_{\pi} - \text{задача оптимизации функционала от математи-$$

ческого ожидания кумулятивной награды по всем случайным действиям среды используется для поиска наилучшей политики агента.

Функции ценности и уравнения Беллмана

Q-функция (Quality function – функция качества) – функция двух переменных величин $Q(s, a)$, возвращающее действительное число, от-

ражающее качество выполнения действия a в состоянии s в долгосрочной перспективе.

Функция $Q(s, a)$ существует и является определенной, но ее конкретное отображение состояний и действий на значения качества заранее не известны. Изучение данного отображения $Q(s, a)$ называют Q-обучением.

Для решения задачи максимизации введенного ранее функционала рассмотрим функцию ценности Беллмана:

$$Q^\pi(s, a) = E[R_t | s_t = s, a_t = a].$$

Теперь рассмотрим оптимальную функцию ценности Беллмана:

$$Q^*(s, a) = \max_{\pi} Q^\pi(s, a).$$

Используя рекуррентное тождество $R_t = r_t + \gamma \cdot R_{t+1}$, было составлено рекуррентное уравнение Беллмана:

$$Q^\pi(s, a) = r(s, a) + \gamma \cdot E_{p(s'|s, a)} \left[E_{\pi(a'|s')} [Q^\pi(s', a')] \right].$$

Аналогичным образом было составлено уравнение Беллмана для оптимальных функций ценности:

$$Q^*(s, a) = r(s, a) + \gamma \cdot E_{p(s'|s, a)} \left[\max_{a'} [Q^*(s', a')] \right].$$

Уравнения Беллмана применяются для поиска оптимальной стратегии агента в случаях, когда известна динамика среды $p(s'|s, a)$, однако на практике во многих случаях такие вероятностные распределения не известны. В связи с этим было разработано множество методов для решения задач обучения с подкреплением, которые не владеют информацией о динамике среды.

Глубокое Q-обучение (DQN). Идея алгоритма

Был разработан новый агент, глубокая Q-сеть (DQN), которая способна сочетать обучение с подкреплением с классом искусственных нейронных сетей.

Рассмотрим задачи, в которых агент взаимодействует с окружающей средой, выполняя действия a . Цель агента состоит в выборе действий для максимизации кумулятивной будущей награды. Говоря более формально, в алгоритме используется глубокая сверточная нейронная сеть для аппроксимации оптимальной функции ценности $Q^*(s, a)$,

$$Q^*(s, a) = \max_{\pi} E \left[r_t + \gamma \cdot r_{t+1} + \gamma^2 \cdot r_{t+2} + \dots | s_t = s, a_t = a, \pi \right],$$

которая представляет собой максимальную сумму вознаграждений r_t , дисконтированных на каждом временном шаге t , достижимую при политике $\pi = P(a|s)$ после выполнения действия a в состоянии s .

В данном алгоритме был использован механизм, называемый воспроизведением опыта D , который используется для получения случайных выборок данных. Механизм был использован для удаления корреляций в последовательности наблюдений и сглаживания изменений в распределении данных. Также было использовано итеративное обновление, которое корректирует значения Q в соответствии с целевыми значениями $\hat{Q}$.

Приблизительная функция значений $Q(s; a; \theta_i)$ параметризируется с помощью глубокой сверточной нейронной сети, в которой θ_i — параметры (веса) Q -сети на итерации i . Для воспроизведения опыта был сохранен опыт агента $e_t = (s_t, a_t, r_t, s_{t+1})$ на каждом временном шаге t в наборе данных $D_t = \{e_1, \dots, e_t\}$.

Во время обучения применяются обновления Q -обучения к образцам (или мини-пакетам) опыта $(s, a, r, s') \sim U(D)$, равномерно выбранным случайным образом из пула сохраненных образцов в D . Обновление Q -обучения на итерации i использует следующую функцию потерь:

$$L_i(\theta_i) = E_{(s, a, r, s') \sim U(D)} \left[\left(r + \gamma \max_{a'} Q(s', a', \theta_i^-) - Q(s, a, \theta_i) \right)^2 \right],$$

где γ — коэффициент дисконтирования; θ_i — параметры Q -сети на i -й итерации; θ_i^- — параметры сети, используемые для вычисления цели на итерации i .

Параметры целевой сети θ_i^- обновляются только параметрами Q -сети θ_i каждые C шагов, оставаясь фиксированными между отдельными обновлениями.

Была использована архитектура, в которой существует вывод для каждого возможного действия a , и только представление состояния является входом в нейронную сеть: $Q(s, \cdot) := f_\theta(s)$. Выходы соответствуют предсказанным Q -значениям отдельных действий a для входного состояния s .

Ниже производится обоснование алгоритма DQN. Оптимальная функция ценности подчиняется уравнению Беллмана. Основная идея заключается в оценке Q -функции с помощью уравнения Беллмана в качестве итеративного обновления,

$$Q_{i+1}(s, a) = E_{s'} \left[r + \gamma \cdot \max_{a'} Q_i(s', a') | s, a \right].$$

Функция $Q_i(s, a)$ в таком итерационном алгоритме сходится к оптимальной функции $Q^*(s, a)$, $Q_i \rightarrow Q^*$ при $i \rightarrow \infty$.

На практике обычно используется аппроксиматор для оценки функции, $Q(s, a; \theta) \approx Q^*(s, a)$ – нейронная сеть с весами θ_i (Q-сеть). Q-сеть можно обучить, настроив параметры θ_i на итерации i , чтобы уменьшить среднеквадратичную ошибку в уравнении Беллмана, где оптимальные целевые значения

$$r + \gamma \cdot \max_{a'} Q^*(s', a')$$

заменяются приближенными целевыми значениями

$$y = r + \gamma \cdot \max_{a'} Q(s', a'; \theta^-),$$

используя параметры θ^- некоторой предыдущей итерации. При этом оптимизация функции потерь осуществляется с помощью стохастического градиентного спуска [6, 7].

Алгоритм DQN с воспроизведением опыта

Ниже представлен алгоритм DQN с воспроизведением опыта [7]:

Инициализировать replay memory D размера N ;

Инициализировать Q-функцию (нейронную сеть) весами θ ;

Инициализировать целевую $\bar{Q}$ -функцию весами $\theta^- = \theta$;

Для $episode = 1, M$:

Инициализировать состояние s_t ;

Для $t = 1, T$:

Выбрать действие $a \sim \varepsilon - greedy$ стратегии, т.е.

С вероятностью ε выбрать случайное действие a_t ,

В противном случае выбрать $a_t = \arg \max_a Q(s_t, a; \theta)$;

Выполнить действие a_t и получить $r_t, s_{t+1}, done_{t+1}$;

Сохранить переход $(s_t, a_t, r_t, s_{t+1}, done_{t+1})$ в D ;

Получить случайный пакет переходов $T := (s, a, r, s', done)$;

Вычислить $y(T) := r + \gamma(1 - done) \cdot \max_{a'} Q(s_{t+1}, a'; \theta)$;

Выполнить шаг градиентного спуска по $(y_j - Q(s_t, a_j; \theta))^2$ относительно параметров нейронной сети θ ;

Каждые C шагов обновлять веса целевой нейронной сети $\bar{Q} = Q$.

Экспериментальные результаты

В качестве среды для применения алгоритма глубокого Q-обучения была взята игра «крестики-нолики» на поле размера 5*5 и выигрышной последовательностью, равно четырем. Для выбранной среды был написан и обучен алгоритм DQN. Каждая итерация обучения представляла собой тысячу ходов за обоих игроков, выполненных параллельно. В процессе обучения веса нейронной сети сохранялись каждую тысячу итераций. Обучение производилось 6000 итераций.

После обучения был поставлен эксперимент, в котором проигрывалось по 100 партий между моделями на разных стадиях обучения и рассчитывались проценты побед, поражений и ничьих (табл. 1). Для разнообразия партий было добавлено условие, что первый ход обязательно выбирается случайным образом.

Таблица 1

Проценты побед, поражений и ничьих в играх моделей
на разных стадиях обучения. Среда «крестики-нолики»

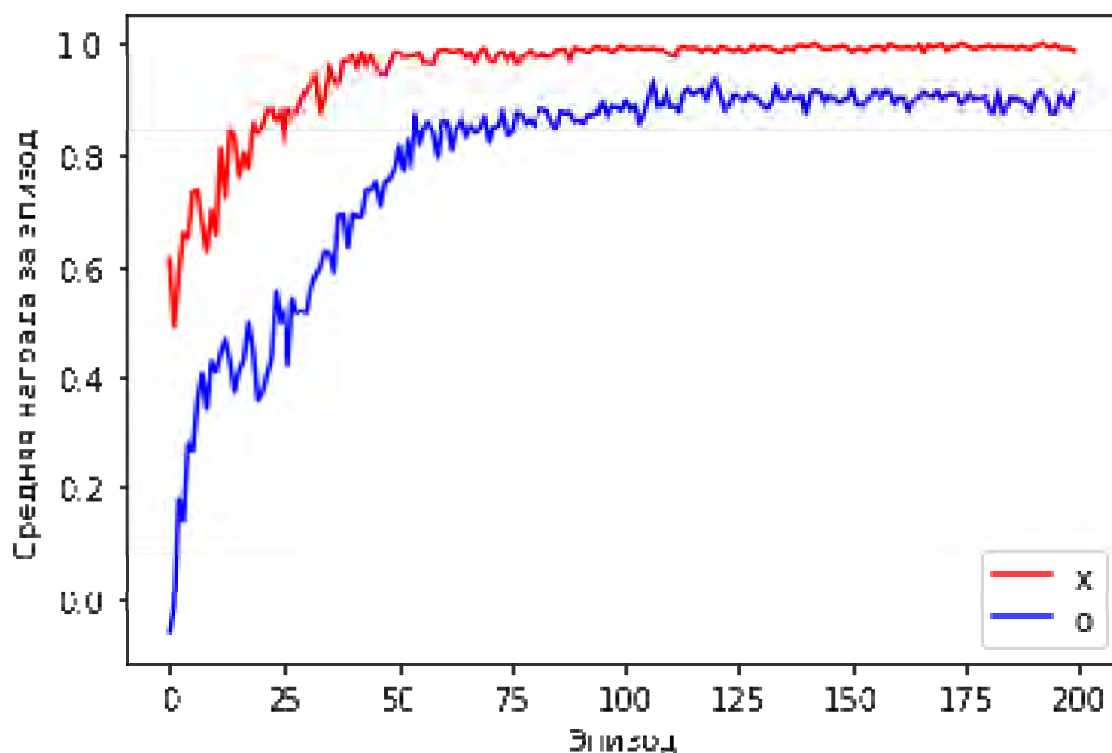
Играющие модели	Проценты побед / поражений / ничьих модели Q ₆₀₀₀ при игре за крестики	Проценты побед / поражений / ничьих модели Q ₆₀₀₀ при игре за нолики
Q ₆₀₀₀ vs Q ₁₀₀₀	80 / 20 / 0	80 / 20 / 0
Q ₆₀₀₀ vs Q ₂₀₀₀	43 / 17 / 40	49 / 0 / 51
Q ₆₀₀₀ vs Q ₃₀₀₀	10 / 13 / 77	9 / 7 / 84
Q ₆₀₀₀ vs Q ₄₀₀₀	19 / 0 / 81	14 / 5 / 81
Q ₆₀₀₀ vs Q ₅₀₀₀	3 / 5 / 92	9 / 10 / 81
Q ₆₀₀₀ vs Q ₆₀₀₀	4 / 0 / 96	0 / 4 / 96

Для наглядности в процессе обучения были также построены графики для среды «крестики-нолики» с полем размера 3*3. На графиках отображается средняя награда за эпизод при игре с соперником, выбирающим ход случайным образом (рис. 2а). Красным обозначена средняя награда игрока, играющего за крестики, а синим – за нолики. На графике хорошо просматривается процесс обучения, т.к. средняя награда постепенно растет к единице.

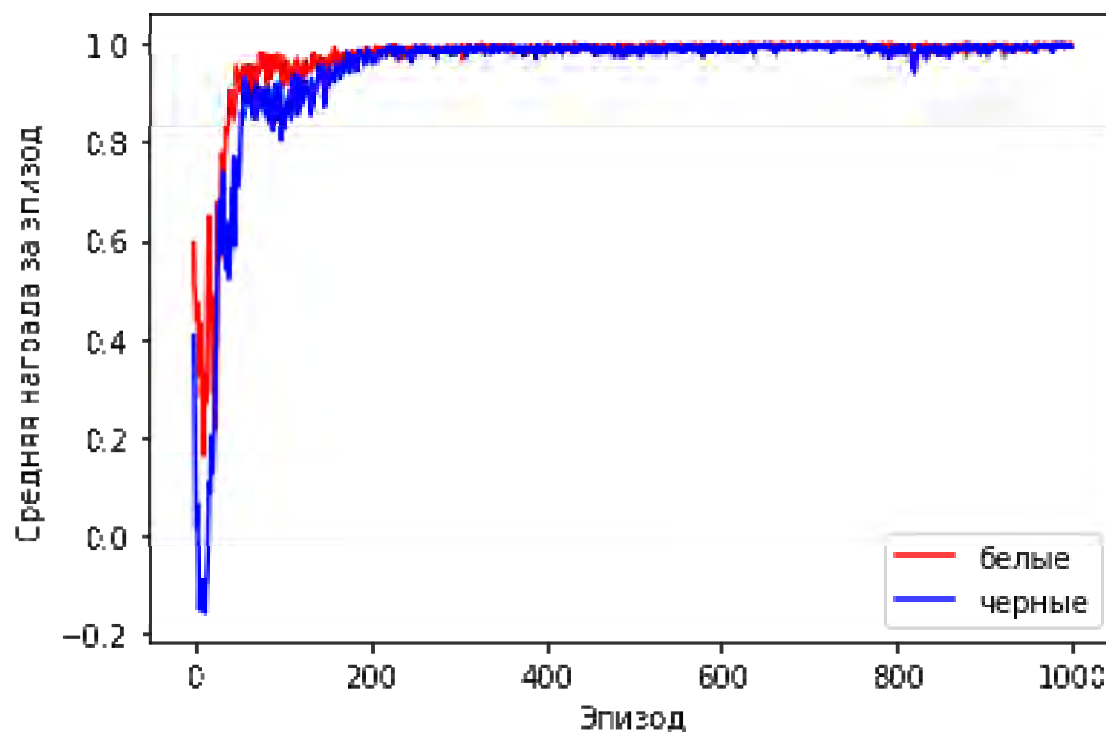
В качестве второй среды для применения DQN была взята настольная игра «прорыв» на поле размера 5*5. Правила игры заключаются в том, чтобы достигнуть пешками вражеской стороны или уничтожить все пешки соперника, при этом пешки двигаются точно также, как в шахматах.

В процессе обучения веса нейронной сети сохранялись каждые 20000 эпизодов. Обучение производилось в течение 100000 эпизодов.

Для наглядности процесс обучения был также представлен на графике (рис. 2б). После обучения был поставлен эксперимент расчета побед и поражений между моделями на разных стадиях обучения (табл. 2).



а)



б)

Рис. 2. График средней награды за эпизод каждого из игроков в процессе обучения в игре а) «крестики-нолики»; б) «прорыв»

Таблица 2

Проценты побед, поражений и ничьих в играх
моделей на разных стадиях обучения. Среда «прорыв»

Играющие модели	Проценты побед / поражений модели Q_{100000} при игре за белых	Проценты побед / поражений модели Q_{100000} при игре за черных
Q_{100000} vs Q_{20000}	95 / 5	87 / 13
Q_{100000} vs Q_{40000}	89 / 11	83 / 17
Q_{100000} vs Q_{60000}	80 / 20	80 / 20
Q_{100000} vs Q_{80000}	75 / 25	68 / 32
Q_{100000} vs Q_{100000}	59 / 41	41 / 59

Список литературы

1. Прорыв (настольная игра). URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Прорыв_\(настольная_игра\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Прорыв_(настольная_игра))
2. How artificial intelligence is transforming the world. URL: <https://www.brookings.edu/research/how-artificial-intelligence-is-transforming-the-world/>
3. Машинное обучение – URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Машинное_обучение
4. Обучение с подкреплением. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Обучение_с_подкреплением
5. Part 3 — Tabular Q Learning, a Tic Tac Toe player that gets better and better. URL: <https://medium.com/@carsten.friedrich/part-3-tabular-q-learning-a-tic-tac-toe-player-that-gets-better-and-better-fa4da4b0892a>
6. Human-level control through deep reinforcement. Learning. URL: <https://storage.googleapis.com/deepmind-media/dqn/DQNNaturePaper.pdf>
7. Playing Atari with Deep Reinforcement. Learning. URL: <https://www.cs.toronto.edu/~vmnih/docs/dqn.pdf>

Методы растрово-векторного преобразования графической информации

Юлия Вячеславовна Вдовина¹, Юлия Фридриховна Захарова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

^{1,2}olegzakharov@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются основные методы векторизации растрового изображения. Основное внимание уделяется прогрессивным вероятностным преобразованиям Хафа, относящимся к классу автоматических алгоритмов.

Ключевые слова: векторизация изображений, преобразования Хафа

Methods of raster-vector transformation of graphic information

Yuliya V. Vdovina¹, Yuliya F. Zakharova²

Penza State University, Penza, Russia

^{1,2}olegzakharov@rambler.ru

Abstract. The main methods of bitmap vectorization are considered. The main attention is paid to progressive probabilistic Hough transforms, which belong to the class of automatic algorithms.

Keywords: vectorization of images, Hough transforms

Технологии преобразования графических документов, полученных путем бумажных носителей в векторную форму, в настоящий момент являются весьма востребованными. Под векторной формой понимается структура данных, которая представляет собой упорядоченный набор слоев объектов, которые моделируются ломанными, точками или многоугольниками, расположенными на плоскости с заданной системой координат. Актуальность данной работы связана с развитием систем автоматизированного проектирования, которые способны интерпретировать векторный формат, а также с существенными преимуществами векторной формы по сравнению с растровым изображением, в частности, простота манипуляций и управления, необходимость в меньшем объеме памяти и т.д.

В данной бакалаврской работе векторизация растрового изображения рассматривается с использованием прогрессивного вероятностного преобразования Хафа, относящаяся к классу автоматических алгоритмов. Алгоритм назван «вероятностным», так как вместо добавления каждой возможной точки на накопительную плоскость, он добавляет только часть из них. Идея состоит в том, что если существует максимум

на плоскости, то, в любом случае, хотя бы частичное попадание в этот максимум будет достаточным условием, чтобы обнаружить линию; как результат - существенное снижение времени выполнения вычислений.

Теоретической основой преобразования Хафа для линий является то, что любая точка на бинарном изображении, возможно, является частью некоторого множества линий. Если описать каждую линию по ее наклону a и сдвигу b . Параметры уравнения прямой $y=kx+b$, где k – угловой коэффициент прямой, вычисляемый через тангенс, а пересечение b – коэффициент сдвига прямой по оси y так, чтобы прямая пересекала ось y на высоте b . Тогда точка на исходном изображении преобразуется во множество точек на плоскости (a,b) , соответствующие всем линиям, проходящим через эту точку (рис. 1). Если преобразовать каждый ненулевой пиксель во входном изображении в такой набор точек в выходном изображении и просуммировать все подобные внесения, тогда линия, появившаяся на входном изображении (то есть на плоскости (x,y)) будет соответствовать локальному максимуму в выходном изображении (то есть на плоскости (a,b)). Поскольку суммируется вклад от каждой точки, плоскость (a,b) – накопительная плоскость.

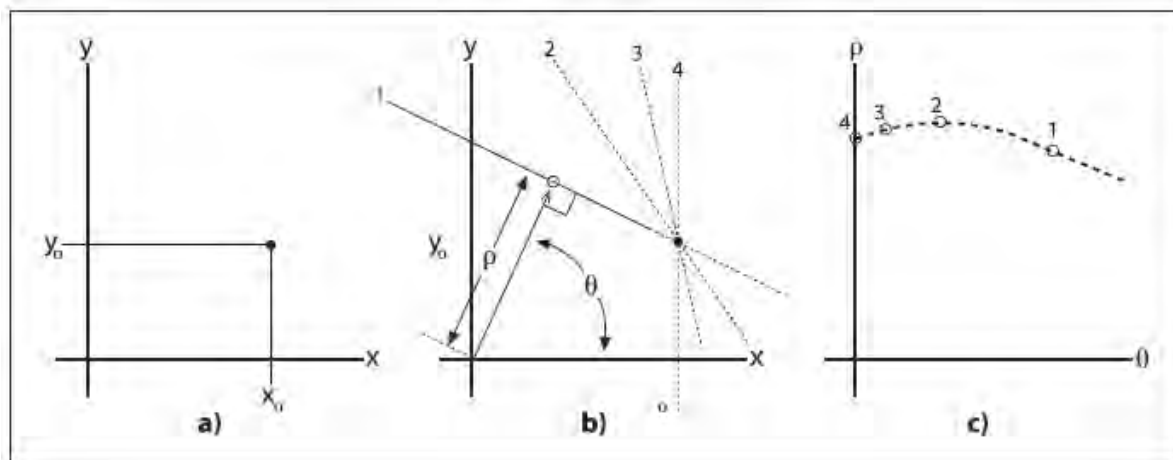


Рис. 1. а) точка на плоскости; б) параметризация различными ρ, θ ; в) кривая, характеристической формы

Может оказаться, что плоскость вида наклон-сдвиг не лучший способ представления всех линий, проходящих через точку (из-за значительно различной плотности линий в зависимости от наклона и от того, что интервал возможных наклонов лежит в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$). По этой причине, в численных расчетах используется другая параметризация преобразования изображения. Предпочтительная параметризация представляет каждую линию как точку в полярных координатах (ρ, θ) , при чем эта линия проходит через указанную точку, но линия должна

быть перпендикулярной к радиус-вектору от начала координат до этой точки на линии (рис. 1).

Базовый алгоритм выделения кривых состоит из следующих шагов:

- Выбор сетки дискретизации. На этом этапе предстоит выбрать шаг дискретизации для каждого параметра кривой. От этого выбора будет зависеть объем вычислений и эффективность алгоритма.

- Заполнение аккумулятора (матрицы счетчиков). Зачастую это самый долгий шаг алгоритма, поскольку заполнение производится путем полного перебора. Сложность алгоритма напрямую зависит от первого шага и составляет $O(NM)$, где N – количество точек, M – количество ячеек аккумулятора.

- Анализ аккумулятора (поиск пиков). В матрице аккумулятора ищется счетчик с максимальным значением.

- Выделение кривой. Каждая ячейка аккумулятора есть значение фазового пространства, а значит, она задает некоторую (искомую) кривую. Но поскольку значение на шаге 1 стало дискретным, может потребоваться уточнение кривой каким-либо иным методом по уже найденным точкам кривой.

- Вычитание из аккумулятора. Для точек выделенной кривой создается временный аккумулятор, который затем поточно вычитается из основного.

- Переход на шаг 3.

В связи с тем, что заполнение аккумулятора на шаге 2 является самой трудоемкой частью алгоритма, сложность которой зависит от размерности фазового пространства и сетки дискретизации, были разработаны модификации стандартного алгоритма (Standard Hough Transform).

Комбинаторное преобразование Хафа (Combinatorial Hough Transform). Эта модификация разрабатывалась для быстрого поиска прямых линий на изображении. В таком случае у нас имеется плоское бинарное изображение (на нем точки интереса одного цвета, а точки фона другого). Поскольку производится поиск прямых линий, то размерность фазового пространства равна двум.

Идея метода состоит в изменении шага 2 (заполнение аккумулятора):

- Исходное бинарное изображение разбивается на небольшие участки.

- В каждом участке для каждой пары точек определяются параметры (ρ, θ) прямой, проходящей через эти точки.

- (ρ, θ) попадают в некоторую ячейку, и ее счетчик соответственно увеличивается.

Иерархическое преобразование Хафа (Hierarchical Hough Transform). Это еще одна модификация для поиска линий на бинарном изображении.

Идея метода:

- Исходное изображение разбивается регулярной сеткой.
- В каждом фрагменте изображения выделяются прямые преобразованием Хафа.

- Производится иерархическое слияние найденных прямых. На каждом уровне рассматриваются 4 соседних фрагмента. Линии, выделенные в каждом из фрагментов, объединяются на основании преобразования Хафа для объединения фрагментов. Если линии не удалось слиться ни с одной линией соседних фрагментов, то она удаляется из рассмотрения.

- Слияние производится до получения одного исходного изображения.

Адаптивное преобразование Хафа (Adaptive Hough Transform). Эта модификация позволяет использовать меньше места для хранения аккумулятора и быстрее выделять кривые. На протяжении всего процесса поиска используется аккумулятор заранее выбранного маленького размера, например, 9×9 или $3 \times 3 \times 3 \times 3$ в многомерном случае.

Алгоритм выглядит следующим образом:

- Задаем небольшой размер аккумулятора.
- До достижения заранее заданного размера ячейки в цикле уменьшать на каждой итерации размер ячейки.

- Заполнение аккумулятора. Выполняется, как и в стандартном варианте, но сложность за счет маленького размера аккумулятора существенно меньше.

- Поиск ячейки с максимальным значением счетчика.

- Ячейка принимается за новое фазовое пространство, переход на шаг 2. Таким образом, мы уменьшаем шаг дискретизации, но только в области интереса (в ячейке с максимальным счетчиком).

- Выделяем кривую.

Главными достоинствами являются:

- меньшая сложность по времени и по памяти;
- практическое решение проблемы дискретизации, поскольку сетка дискретизации не регулярная и на каждой итерации уточняется.

Вероятностное преобразование Хафа (Probabilistic Hough Transform). В этой модификации алгоритма рассматривается только доля α точек из X , при этом результат с некоторой вероятностью получается такой же, как и у стандартного алгоритма. Доля точек выбирается случайно с равномерной вероятностью.

Показано, что существует α_t , такое, что при $\alpha > \alpha_t$ ошибок (относительно стандартного алгоритма) происходит очень мало, а при $\alpha < \alpha_t$ их количество резко возрастает. Поэтому рекомендуется выбирать α , которое находится в диапазоне 5–15% от всего количества точек.

Очевидное достоинство модификации заключается в сокращении перебора на шаге 2. И также очевиден недостаток – недетерминированность результата относительно входных данных.

Прогрессивное вероятностное преобразование Хафа (Progressive Probabilistic Hough Transform)

Алгоритм назван "вероятностным", т.к. вместо добавления каждой возможной точки на накопительную плоскость, он добавляет только часть из них. Идея состоит в том, что если существует максимум на плоскости, то, в любом случае, хотя бы частичное попадание в этот максимум будет достаточным условием, чтобы обнаружить линию; как результат - существенное снижение времени выполнения вычислений.

Алгоритм формулируется следующим образом:

- Если в облаке нет точек, окончание.
- Аккумулятор пополняется случайно выбранной точкой из X , а точка удаляется из рассмотрения.
- Если максимальное значение аккумулятора не превосходит порога, переход на шаг 1.
- Находится кривая максимальной длины. Внутри некоторого коридора, определяемого ячейкой с максимальным значением счетчика, производится поиск кривой с максимальной длиной.
- Все точки найденной кривой удаляются с исходного изображения и аккумулятора.
- Переход на шаг 1.

Достоинством этого метода в том, что он постоянно пополняет результат. Поэтому поиск можно прервать при достижении достаточного количества результатов или по истечении некоторого времени.

Список литературы

1. Петров М. Н., Молочков В. П. Компьютерная графика : учебник. СПб. : Издательство Питер, 2004. 812 с. (Серия: Учебник для вузов).
2. Кэмпбелл М. Компьютерная графика. The Complete Idiot's Guide to Computer Illustration / пер. с англ. Степанова А. Н. М. : Изд-во АСТ: Астрель, 2007. 364 с. (Серия: The Complete Idiot's Guide).
3. Мерков А. Б. Распознавание образов. Введение в методы статистического обучения М. : Едиториал УРСС, 2011. 256 с.
4. Пантюхин П. Я., Быков А. В., Репинская А. В. Компьютерная графика. Ч. 1. М. : Изд-во Инфра-М, 2007. 88 с. (Серия: Профессиональное образование).
5. Шикин Т. В., Борисков А. В. Компьютерная графика: динамика и реалистические изображения. М. : Диалог-МИФИ, 1996. 288 с.
6. Форсайт Д. А., Понс Д. Компьютерное зрение. Современный подход. М. : Вильямс, 2004. 928 с.

7. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 51-7

Приложения функций нескольких переменных в экономической теории

Татьяна Вячеславовна Черушева

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
tank1100@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы приложения функций нескольких переменных к экономической теории. Особое внимание уделено линиям уровня и частным производным первого порядка.

Ключевые слова: фактор, линия уровня, функция, производная

Applications of functions of several variables in economic theory

Tat'yana V. Cherusheva

Penza State University, Penza, Russia
tank1100@yandex.ru

Abstract. The questions of application of functions of several variables to economic theory are considered. Special attention is paid to level lines and partial derivatives of the first order.

Keywords: factor, level line, function, derivative

Построение материально-технической базы современного общества требует повседневного совершенствования методов планирования разных форм хозяйствования, повышения эффективности производства, экономии ресурсов, улучшения методов экономических расчетов и строгого их обоснования. В основе экономико-математических исследований лежит математическое моделирование изучаемого экономического процесса. Не секрет, что количество часов по математике в вузах неуклонно сокращается с переходом на образование по системе бакалавриата. В связи с этим возрастает роль математического образования студентов экономических специальностей, у которых *математика преподается один семестр*. До студентов необходимо донести не только основные понятия, но и приложения математических абстракций к экономике. Часто эти вопросы относят на самостоятельное изучение. В качестве примера рассмотрим функции многих переменных, а именно некоторые

приложения функций многих переменных к экономической теории и определим требования к поступающим.

Значительная часть экономических механизмов иллюстрируется на рисунках, изображающих линии уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$. Например, линии уровня производственной функции называются изоквантами.

Пусть x и y – два различных фактора производства, а функция $z = f(x, y)$ характеризует выпуск продукции, который позволяют значения факторов x и y . На рис. 1 линии уровня $f(x, y) = Q$ изображены сплошными линиями, а штриховкой выделена так называемая экономическая область, которая характеризуется тем, что высекаемые ею части изоквант представляют собой графики убывающих функций, т.е. увеличение количества одного фактора позволяет уменьшить количество другого, не меняя размера выпуска.

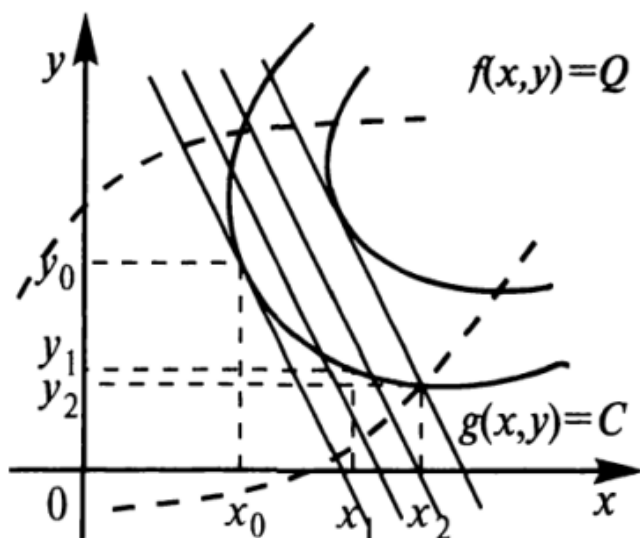


Рис. 1

Иными словами, экономическая область – это множество значений факторов, допускающих замещение одного из них другим. Очевидно, что все «разумные» значения x и y принадлежат экономической области.

Изокванты позволяют геометрически иллюстрировать решение задачи об оптимальном распределении ресурсов. Пусть $z = g(x, y)$ – функция издержек, характеризующая затраты, необходимые для обеспечения значений ресурсов x и y (часто можно считать, что функция издержек линейная: $g(x, y) = p_x x + p_y y$, где p_x и p_y – «цены» факторов x и y). Линии уровня этой функции также изображены на рис. 1. Комбинации линий уровня функции $f(x)$ и $g(x)$ позволяют делать выводы о предпочтительности того или иного значения факторов x и y . Очевидно,

например, что пара значений (x_1, y_1) более предпочтительна, чем пара (x_2, y_2) , так как обеспечивает тот же выпуск, но с меньшими затратами. Оптимальными же значениями факторов будут значения (x_0, y_0) – координаты точки касания линии уровня функции выпуска и функции издержек.

Линии уровня функции полезности, называемые кривыми безразличия, также позволяют рассматривать вопросы замещения одного товара другим и иллюстрировать решение задачи об оптимальном потреблении (потребительского выбора) (см. рис. 2). Линия уровня затрат на приобретение товаров x, y изображены на рис. 2 пунктиром. Оптимальное потребление обеспечивается значениями (x_0, y_0) – координатами точки касания кривой безразличия и линии уровня затрат. В этой точке заданная полезность достигается наиболее экономичным образом. Другой пример кривых безразличия возникает в теории инвестиций.

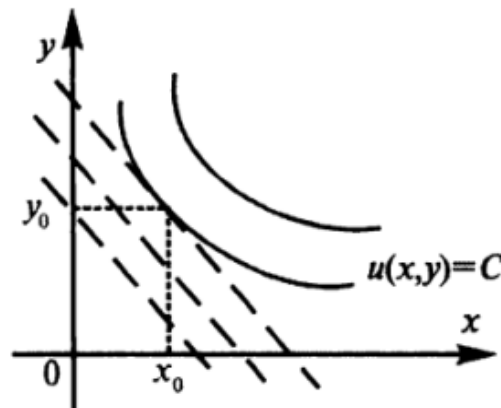


Рис. 2

Портфель ценных бумаг (портфель – совокупность определенных ценных бумаг в определенных количествах) характеризуется двумя основными параметрами – ожидаемой доходностью r и риском σ . Каждому портфелю можно поставить в соответствие точку на координатной плоскости (σ, r) , и тогда множество всех возможных портфелей представляет некоторую область D (см. рис. 3).

Очевидно, что при равных доходностях инвестор предпочтет портфель с меньшим риском. Таким образом, кривые безразличия – линии уровня функции предпочтения $U = U(r, \sigma)$ – выпуклы вниз. Точка T , в которой линия безразличия касается области D соответствует наиболее предпочтительному для данного инвестора портфелю.

Понятие частной производной также находит применение в экономической теории. Понятие частной эластичности функции нескольких переменных $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно переменной x_i вводится следующим образом:

$$E_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x_i z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) = \frac{x_i}{z} z'_{x_i}.$$

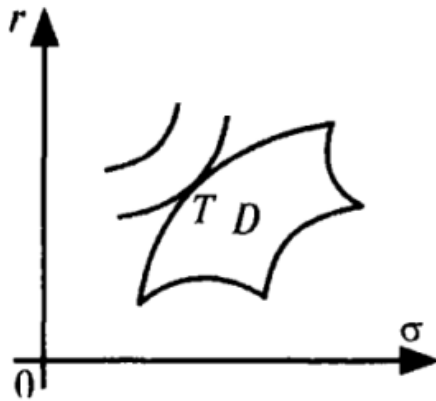


Рис. 3

Рассмотрим частные производные u'_x , u'_y — функции полезности, называемые предельными полезностями, и обозначаются Mu_x , Mu_y . Если измерять количество товара в стоимостном выражении, то предельные полезности можно рассматривать как функции спроса на соответствующий товар. Найдем предельные полезности для функции постоянной эластичности

$$u(x, y) = \frac{a_1}{1-b_1} x^{1-b_1} + \frac{a_2}{1-b_2} y^{1-b_2}.$$

Получаем $Mu_x = a_1 x^{-b_1}$, $Mu_y = a_2 y^{-b_2}$. Можно сделать вывод, что функции спроса с ростом стоимости каждого товара являются убывающими, а параметры b_1 , и b_2 представляют частные эластичности спроса на эти товары. Если рассматривать спрос q как функцию нескольких переменных, например двух — цены товара p и доходов потребителей r , т.е. $q = f(p, r)$, то можно говорить о частных эластичностях спроса от цены $E_p(q) = \frac{p}{q} q'_p$ и спроса от доходов $E_r(q) = \frac{r}{q} q'_r$.

Если при исследовании спроса на данный товар рассматривать влияние другого, альтернативного товара ценой p_1 , т.е. рассматривать спрос как функцию трех переменных $q = f(p, p_1, r)$, то можно ввести перекрестный коэффициент эластичности спроса, определяемый по формуле

$$E_{p_1}(q) = \frac{p_1}{q} q'_{p_1}$$

и показывающий приближенно процентное изменение спроса на данный товар при изменении цены альтернативного товара на 1 %. Очевидно, что для взаимозаменяемых товаров $E_{p_1}(q) > 0$, так как увеличение цены одного товара приводит к увеличению спроса на другой. В то же время для взаимодополняющих товаров $E_{p_1}(q) < 0$, ибо в этом случае рост цены любого товара приводит к снижению спроса.

В заключение рассмотрим пример, связанный с производственной деятельностью фирмы. Пусть z - количество продукции, выпущенной некоторой фирмой; x, y - затраты ресурсов двух видов; $z = Q(x, y)$ – дифференцируемая функция, устанавливающая связь x, y, z . Предположим, что x, y, z заданы в натуральных единицах, p_x, p_y, p_z - соответствующие этим единицам постоянные цены. Тогда выручка $R(x, y) = p_z Q(x, y)$, а функция прибыли запишется следующим образом:

$$\pi(x, y) = R(x, y) - p_x x - p_y y.$$

Пусть z^* - оптимальный, с точки зрения прибыли, выпуск продукции; x^*, y^* - соответствующие затраты ресурсов. Если точка $M(x^*, y^*)$ - внутренняя точка области определения функции $\pi(x, y)$, то M - точка ее локального максимума. По необходимому признаку локального экстремума в точке M обращаются в нуль частные производные первого порядка:

$$\pi_x(M) = R'_x(M) - p_x = 0; \pi_y(M) = R'_y(M) - p_y = 0$$

или

$$R'_x(M) = p_x, R'_y(M) = p_y.$$

Итак, в точке локального максимума прибыли предельная выручка от каждого ресурса совпадает с его ценой. Этот вывод касается и большего числа переменных.

Вывод

Показано, что студенты экономических специальностей должны иметь хорошую школьную подготовку, включающую в себя знания о возрастающих и убывающих функциях, производных, выпуклости и вогнутости, а также строить области, ограниченные линиями.

Список литературы

1. Замков О. О., Толстомятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы анализа экономики. М. : Дело и сервис, 1997.

2. Лопатников Л. И. Краткий экономико-математический словарь. М. : Наука, 1987.

3. Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. проф. Кремера Н. Ш. [и др.]. 3-е изд. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2010. 479 с.

4. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г. Математика в экономике : учебник : в 2 ч. М. : Финансы и статистика, 1999. Ч. 2. 376 с.

**Внутрипредметные связи математического
анализа при изучении площади плоской фигуры**

Ольга Васильевна Болотникова¹, Татьяна Владимировна Грунина²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹olgavs3011@yandex.ru, ²eliseevat@mail.ru

Аннотация. Рассматривается подход к реализации внутрипредметных связей при изучении приложений интегрального исчисления.

Ключевые слова: математический анализ в вузе, внутрипредметные связи, кратные и криволинейные интегралы

**Intra-subject relations of mathematical
analysis in the study of a flat figure area**

Ol'ga V. Bolotnikova¹, Tat'yana V. Grunina²

Penza State University, Penza, Russia

¹olgavs3011@yandex.ru, ²eliseevat@mail.ru

Abstract. The article deals with the approach to the implementation of intra-subject relations in the study of integral calculus applications.

Keywords: mathematical analysis in higher school, intra-subject relations, multiples and curved integrals

Внутрипредметные связи математики – это взаимосвязь и взаимообусловленность математических понятий, разделенных временем их изучения. Внутрипредметные связи формируют логическое мышление, позволяют сформировать динамичную, качественно изменяющуюся систему знаний [2].

Реализация внутрипредметных связей не может происходить сама по себе, для этого нужна специальная организация подачи учебного материала и самого процесса обучения, направленная на актуализацию этих связей.

Математический анализ – одна из основных дисциплин, изучаемых студентами направления 03.03.02 «Физика». Целью изучения дисциплины является формирование компетенции ОПК-1 «Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности» (ОПК - 1.2 «Применяет физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера»). На занятиях по математическому анализу при изучении нового материала почти всегда

приходится использовать ранее введенные понятия, утверждения и теоремы, поэтому важность формирования и реализации внутрипредметных связей очевидна.

Рассмотрим подход к реализации внутрипредметных связей при изучении площади плоской фигуры в концепции сборника задач по математическому анализу Г.Н. Бермана. Решим задачу о нахождении взаимосвязи между формулами для вычисления площади плоской фигуры, используя определенный интеграл, двойной интеграл и криволинейный интеграл второго рода.

При изучении темы «Геометрические и физические приложения определенного интеграла» доказывается, что в прямоугольных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (при условии $f_1(x) \leq f_2(x)$) и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a \leq x \leq b$), находится по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (1)$$

Задача 1 [1, № 2455]. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, уравнения которых $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

Чтобы решить задачу, нужно выполнить чертеж, найти точки пересечения линий для установления верхнего и нижнего пределов интегрирования и воспользоваться формулой (1).

При изучении темы «Двойные интегралы» необходимо сформировать алгоритм вычисления двойного интеграла:

1. Выполнить чертеж.
 2. Расставить пределы интегрирования и перейти к повторным интегралам.
 3. Вычислить внутренний интеграл.
 4. Вычислить внешний интеграл и получить ответ.
- Площадь S области D равна

$$S = \iint_D dx dy. \quad (2)$$

Если область определена неравенствами $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ при $a \leq x \leq b$, то

$$S = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy, \quad (3)$$

и после применения формулы Ньютона – Лейбница из формулы (3) получим выражение (1), т. е. задача вычисления площади с помощью

двойного интеграла сводится к задаче нахождения площади с помощью определенного интеграла.

Задача 2 [1, № 2455]. Найти двойным интегрированием площадь области, ограниченной линиями, уравнения которых $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

Для решения задачи нужно выполнить чертеж, выбрать удобное для вычислений направление интегрирования и воспользоваться формулой (2).

После решения задачи необходимо вернуться к задаче 1, показав, что в обоих случаях результат вычислений одинаковый.

Задача 3 [1, № 3604]. Найти двойным интегрированием площадь области, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (лемниската Бернулли).

При изучении темы «Приложения криволинейных интегралов II рода» получаем формулу для вычисления площади плоской области D

$$S = -\oint_C y dx, \quad (4)$$

где C – замкнутый контур, ограничивающий область D . Направление обхода контура выбирается обратным движению часовой стрелки.

Если контур задан явно, является границей области, определенной неравенствами $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ при $a \leq x \leq b$, то, используя свойство аддитивности и формулу нахождения криволинейного интеграла II рода, из (4) получим выражение (1)

$$S = -\oint_C y dx = -\left(\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx \right) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Кроме того, применяя формулу Грина к выражению для вычисления площади

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx,$$

приходим к формуле (2):

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy.$$

Задача 4 [1, № 3867]. Вычислить при помощи криволинейного интеграла площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

Для решения задачи нужно выбрать положительное направление обхода и применить формулу (4).

После решения задачи 4 необходимо вернуться к задаче 3, заметив, что решение одной и той же задачи при помощи двойного интеграла и криволинейного интеграла II рода приводит к одному и тому же результату.

В качестве подобных упражнений могут рассматриваться взаимосвязи между формулами для вычисления длины кривой, центра тяжести кривой, работы силы и других физических величин.

Организованный таким образом процесс изучения площади плоской фигуры с использованием внутрипредметных связей позволяет систематизировать и обобщить понятия, повышает качество усвоения дисциплины, делает приобретенные знания осознаннее и прочнее. Необходимо отметить, что такой подход способствует формированию компетенции ОПК-1 и повышает эффективность учебного процесса.

Список литературы

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб. : Лань, 2016. 492 с.
2. Далингер В. А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1991. 80 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа : учебник. 9-е изд. СПб. : Лань, 2008. Ч. 2. 464 с.

**Обработка данных Яндекс.Форм и анализ
диагностики интернет-зависимости обучающихся**

**Евгений Евгеньевич Яшин¹, Татьяна Фанадовна Мамедова²,
Евгения Васильевна Кирдяшова³**

^{1,2,3}Национальный исследовательский Мордовский
государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, Россия
¹flashter94@mail.ru, ²mamedovاتف@yandex.ru, ³wekl11@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается проблема интернет-зависимости подростков и молодежи посредством проведения анкетирования с помощью Яндекс.Форм. Описана методика проведения анкетирования, критерии оценивания теста. Произведен анализ полученных результатов, описаны перспективы проведения дальнейшего исследования.

Ключевые слова: анкетирование, Яндекс.Формы, интернет-зависимость, компьютерные технологии

**Yandex data processing. Forms and analysis
of diagnostics of Internet addiction of students**

Evgeniy E. Yashin¹, Tat'yana F. Mamedova², Evgeniya V. Kirdyashova³

^{1,2,3}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹flashter94@mail.ru, ²mamedovاتف@yandex.ru, ³wekl11@yandex.ru

Abstract. The problem of Internet addiction of adolescents and young people is considered by conducting a questionnaire using Yandex.Forms. The methodology of conducting the questionnaire, the criteria for evaluating the test are described. The analysis of the obtained results is carried out, the prospects for further research are described.

Keywords: Questioning, Yandex.Forms, Internet addiction, computer technology

В настоящее время проблема интернет-зависимости носит разноплановый характер. Связано это с тем, что информационные технологии глубоко внедряются в жизнь молодого поколения и появляются новые направления исследования, такие как «Цифровая гигиена» [2], «Цифровая безопасность», «Кибер-защита» и другое. На наш взгляд, в любом случае дети школьного возраста нуждаются в профилактике по работе за персональным компьютером и работе в интернете. Именно поэтому, необходимо контролировать ситуацию с интернет-зависимостью и уже затем исследовать другие проблемы.

Навязчивое стремление использовать Интернет и избыточно пользоваться им, описал психиатр, Айвен Голдберг, еще в 1994 году. Данное

расстройство не является психиатрическим по медицинским критериям (DSM-5 и МКБ-10). Однако, в мае 2019 года в данное расстройство внесены зависимости от видеоигр и азартные игры.

На текущий момент, по материалам сайтов (pedsovet.su, atlasplay.ru, netaddiction.ru, bizhit.ru, vawilon.ru, yandex.ru) приведена статистика интернет-зависимости у подростков в период 2015 – 2017 годов. По данным таблицы прирост пользователей сети интернет в подростковом возрасте превышает 3 миллиона человек и составляет 90 миллионов человек от населения России, что составляет около 90%, пользуются Интернетом.

В 2021 году с 1 по 17 июня порталом Superjob был произведен опрос 1600 респондентов из 220 населенных пунктов на тему «Интернет-зависимость». По данным опроса 42% россиян, считают, что у них присутствует интернет-зависимость. 11% опрошенных однозначно заверяют, что у них есть интернет-зависимость. 31% - предполагает и только 24% опрошенных неоднозначны в своем ответе. Также, только каждый пятый (21%) ежедневно устраивает себе «цифровую голодовку», чтобы сделать перерыв в использовании Интернета.

В рамках научной работы «Исследование нелинейных динамических процессов социальной активности молодежи» (на примере исследования интернет зависимости у обучающихся в школе и вузе) [1], нами была создана Яндекс.Форма [3] для анкетирования обучающихся в школе и вузе. Анкета составлена на основе теста для диагностики интернет-зависимости и выявления социально-демографических особенностей личности респондентов (С.А. Кулакова). Стоит отметить, что данная диагностика (анкета) является модификацией опроса К. Янга, которая позволяет диагностировать и оценивать степень интернет-зависимости у ребенка родителями или законными представителями.

Анкета содержит 20 вопросов, на каждый из которых предлагается 5 вариантов ответа:

- 1 балл – очень редко;
- 2 балла – очень редко;
- 3 балла – очень редко;
- 4 балла – очень редко;
- 5 баллов – очень редко.

Максимальная сумма баллов может быть равна 100 (20 вопросов * 5 баллов = 100 баллов).

Минимальная сумма – 20 (20 вопросов * 1 балл = 20 баллов).

Если сумма баллов находится в диапазоне от 50 до 79 (включая начало и конец), то необходимо дать рекомендации для родителей респондента, что необходимо учитывать серьезное влияние интернета на жизнь ребенка.

При сумме баллов больше 79, с высокой долей вероятности, необходимо рекомендовать родителям обратиться за консультацией специалиста, для подтверждения или опровержения интернет-зависимости.

В анкетировании приняли участие молодежь и подростки в возрасте 18 и старше и 11-5 лет соответственно.

Количество респондентов составило 115 человек. Каждый участник опроса ознакомился с целью исследования, алгоритмом проведения. От каждого респондента было получено согласие на участие и последующую обработку полученной информации.

Гендерное соотношение респондентов представлено в таблице 1.

Таблица 1

Гендерное соотношение респондентов

Подростки			Взрослые		
Пол	Количество	Процент	Пол	Количество	Процент
Мальчики	32	27,8	Мальчики	40	34,8
Девочки	26	22,6	Девочки	17	14,8
Возраст	Количество	Процент	Возраст	Количество	Процент
11 лет	10	8,7	18 лет	23	20,0
12 лет	12	10,4	19 лет	20	17,4
13 лет	16	13,9	20 лет	5	4,3
14 лет	9	7,8	21 год	9	7,8
15 лет	11	9,6	Общий процент (по возрасту)		100,0
Всего респондентов			115	Общий процент (гендер)	100,0

Результаты тестирования показали, что:

- мальчики чаще девочек могут быть подвержены интернет-зависимости;
- подростки более восприимчивы к интернету, нежели взрослые;
- больше половине респондентов рекомендовано продолжение участия в исследовании (таблица 2).

По результатам анкетирования мы можем предположить, что определенным респондентам может быть необходима помощь или консультация. Для полноты картины нам необходимо определить факторы, которые могли способствовать развитию или приобретения интернет-зависимости. На наш взгляд это может быть связано с ближайшим окружением респондента (семья, друзья, школа, вуз). Планируется провести еще один порос среди ближайшего окружения, используя методику скриннинг-теста и методику «Анализ семейного воспитания», что позволит расширить текущую картину и сделать новые выводы по исследованию.

Таблица 2

Результаты опроса

Подростки			Взрослые		
Пол	Количество	Процент	Пол	Количество	Процент
Мальчики	32	27,8	Мальчики	40	34,8
Девочки	26	22,6	Девочки	17	14,8
Общий балл	Количество	Процент	Возраст	Количество	Процент
<50	15	13,0	<50	27	23,5
[50; 79]	32	27,8	[50; 79]	19	16,5
>80	11	9,6	>80	11	9,6
			Общий процент (по возрасту)		100,0
Всего респондентов			115	Общий процент (гендер)	100,0

Список литературы

1. Яшин Е. Е., Мамедова Т. Ф., Кирдяшова Е. В. Об использовании яндекс форм для анкетирования обучающихся // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVI Междунар. науч.-техн. конф. Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. С. 149–152.
2. Яшин Е. Е., Кирдяшова Е. В. Обоснование педагогических условий формирования у обучающихся digital skills при изучении информатики : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф. (Казань, 22–28 марта 2021 г.) / под ред. А. А. Агафонов [и др.]. Казань : Изд-во Казанского университета, 2021. 192 с.
3. Яндекс-формы. URL: <https://yandex.ru/forms/mobile> (дата обращения: 30.11.2021).

Модель формирования учебной мотивации студентов колледжа при изучении естественно-научных дисциплин

Светлана Юрьевна Варлашина¹, Наталья Владимировна Наземнова²

¹Пензенский колледж транспортных технологий, г. Пенза, Россия

²Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹varlashina-svetlana@mail.ru, ²natalianazemnova@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается проблема снижения интереса студентов колледжей к естественно-научным дисциплинам. Главной задачей преподавателей естественно-научных дисциплин становится повышение не только внешней, но и внутренней мотивации учащихся к получению знаний, так как именно внутренняя мотивация является движущей силой, стимулирующей личность прилагать усилия для достижения поставленных целей. В работе предлагается авторская модель формирования учебной мотивации студентов при изучении дисциплин естественно-научного цикла.

Ключевые слова: формирование учебной мотивации студентов, естественно-научные дисциплины, профессиональные образовательные учреждения, деятельностный подход в обучении

Model of formation of educational motivation of college students in the study of natural sciences

Svetlana Yu. Varlashina¹, Natal'ya V. Nazemnova²

¹Penza College of Transport Technologies, Penza, Russia

²Penza State University, Penza, Russia

¹varlashina-svetlana@mail.ru, ²natalianazemnova@yandex.ru

Abstract. The problem of reducing the interest of college students in natural sciences is considered. The main task of teachers of natural science disciplines is to increase not only the external, but also the internal motivation of students to acquire knowledge, since it is internal motivation that is the driving force that stimulates a person to make efforts to achieve their goals. The paper proposes the author's model of the formation of students' educational motivation in the study of disciplines of the natural science cycle.

Keywords: formation of students' educational motivation, natural science disciplines, professional educational institutions, activity-based approach to teaching

В концепции модернизации российского образования подчеркивается, что «...основной целью профессионального образования на современном этапе развития страны является подготовка квалифицированного работника соответствующего профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего сво-

ей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

В связи с этим, как никогда ранее, становится актуальным вопрос о том, какой должна быть подготовка рабочих, специалистов в профессиональных образовательных учреждениях, чтобы обеспечить им возможность реализовать свои способности и возможности в профессиональной деятельности и социуме.

Сегодня каждый педагог естественнонаучных дисциплин сталкивается с рядом проблем в преподавании, которые связаны с низким уровнем школьных знаний по предмету; низкой мотивацией к учебе со стороны студентов; некоторые разделы дисциплин имеют высокую наукообразность; несоответствием традиционных методов и форм обучения и воспитания новым тенденциям развития системы образования и социально-экономическим условиям развития общества, породившим целый ряд объективных инновационных процессов. В итоге мы получаем, что дисциплины естественнонаучного цикла, а следующие за ними и некоторые общепрофессиональные дисциплины, становятся самыми сложными для изучения у студентов.

Одним из направлений решения данных проблем является изменение формы, стиля преподавания. Необходимо отходить от «преподавания у доски», и использовать активные формы ведения уроков, переходя к деятельностному обучению. Это намного интереснее и повышает мотивацию, а значит, способствует лучшему усвоению материала.

В числе психолого-педагогических проблем обучения студентов наиболее значимой является проблема формирования учебной мотивации студентов, поскольку высокий уровень учебной мотивации является одним из наиболее действенных средств повышения эффективности и качества учебного процесса. Таким образом, вопрос об учебной мотивации – это, по существу, вопрос о качестве учебной деятельности. Мотивы учебной деятельности в значительной мере определяют отношение студента к решению поставленных задач, создают предпосылки эффективности и результативности самой профессиональной деятельности.

Мотивами творческой активности студентов выступают различные потребности, интересы и склонности к творческой деятельности. В целях формирования такой активности обучающихся эффективно использование таких форм организации образовательного процесса, которые способствуют разнообразному (индивидуальному, групповому, коллективному) изучению (усвоению) учебных вопросов (проблем), активному взаимодействию обучаемых и преподавателя, живому обмену мнениями между ними, нацеленному на выработку правильного понимания содержания изучаемой темы и способов ее практического использования. На подобных занятиях центр тяжести переносится с информационного обучения на активизацию познавательной деятельности и самостоятельной работы.

Необходимыми условиями для развития творческой активности студентов являются: совершенствование содержания учебного процесса; внедрение эффективных форм и методов обучения; широкое применение в учебном процессе современных средств обучения.

Перечисленные выше условия отражены в представленной нами модели формирования учебной мотивации студентов в ходе изучения дисциплин естественнонаучного цикла, в которой выделены три основных этапа: ценностный, процессуальный и оценочный (рис. 1).

Цель ценностного этапа направлена на осознание студентом того, ради чего он учится, и что его побуждает к учению.

Основными задачами данного этапа являются следующие:

- разработать диагностический инструментарий, позволяющий с достаточной степенью достоверности выносить заключение об уровне сформированности учебной мотивации студентов;
- формировать мотивы (понимание необходимости и значимости мотивации процесса обучения);
- стимулировать эмоциональное состояние студента на принятие учебной задачи;
- актуализировать потребность в самосовершенствовании, самореализации, в осознании себя как личности.

В числе средств первого этапа будут такие, которые вызывают исходную мотивацию: побуждение к новой деятельности, подчеркивание предыдущих достижений, вызывание относительной неудовлетворенности чем-то из предыдущей деятельности, усиление акцента на предстоящей работе, заинтересованность.

Известно, что все средства только в том случае адекватны, если они определяют, формируют, изменяют внутреннее отношение студента, поэтому формирование мотивации необходимо начинать с решения вопроса, как сделать объект изучения для студента значимым, близким, как возбудить к нему познавательный интерес.

Следует заметить, что проблемные ситуации на данном этапе должны быть достаточно сложными и требующими совместной деятельности педагога и студента, иначе их решение не приведет к желаемой цели: побуждения студента к овладению научными знаниями. С другой стороны, совместное преодоление трудностей указывает на их разрешимость и временный характер. Решение сложной задачи укрепляет студента в своих силах, несет положительный эмоциональный заряд.

В данном блоке осуществляется целеполагание в учении, направленность на осознание целей учения и их реализацию. Известно, что реализация мотивов зависит от процесса целеполагания, то есть умения студентов ставить цели и достигать их в обучении. Цели – это ожидаемые конечные и промежуточные результаты тех действий студента, которые ведут к реализации их мотивов.

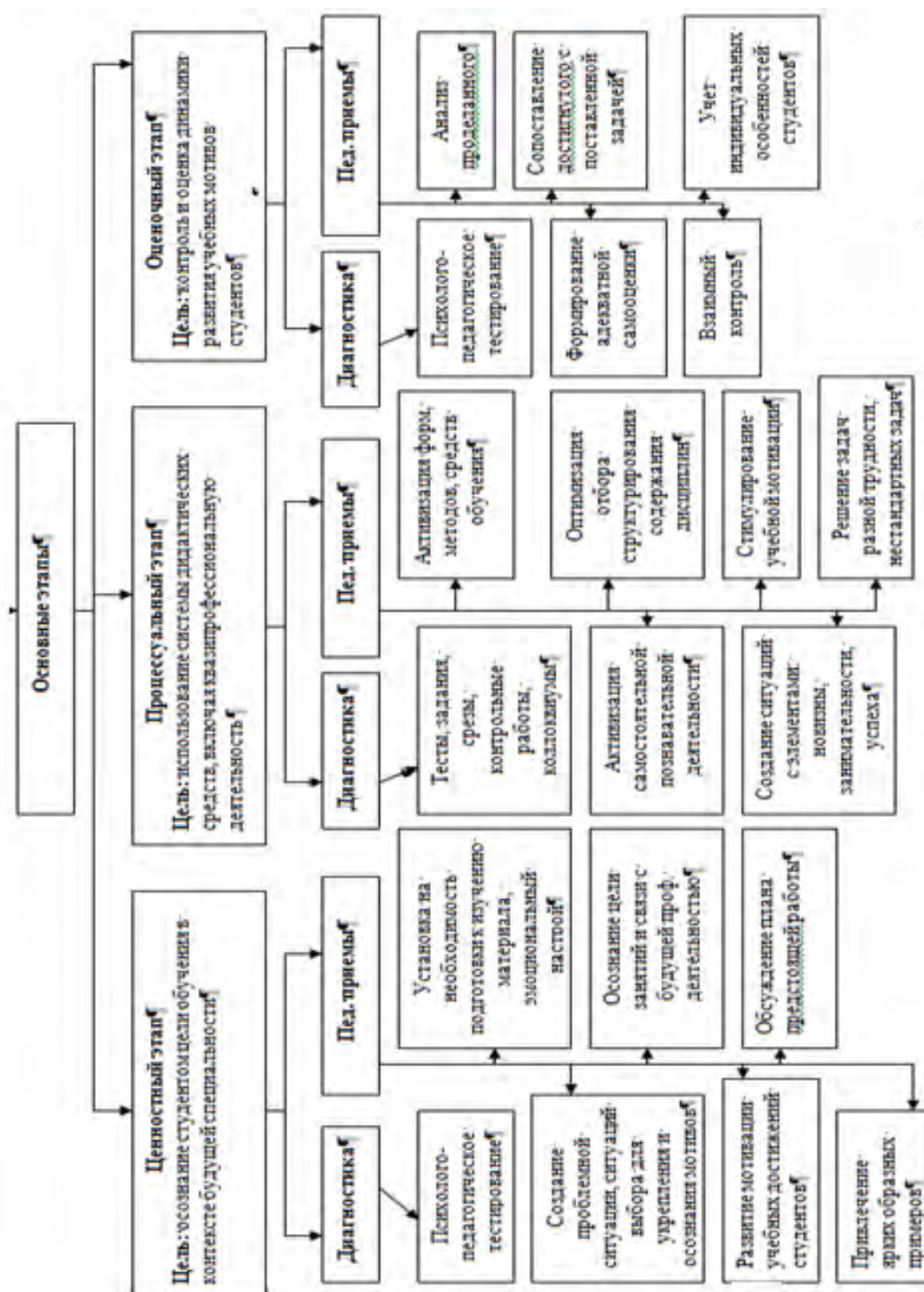


Рис. 1. Модель формирования учебной мотивации при изучении дисциплин естественнонаучного цикла

Необходимо создавать специальные ситуации, которые высвечивают те или иные стороны целеполагания, актуализируют их: прерывание и незавершенность деятельности по внешним причинам; возвращение к прерванному заданию и его возобновление; варьирование ситуаций по степени их обязательности и выявление поведения учащихся в них; выполнение задач разной трудности и обоснование этого выбора; наблюдение за поведением в ситуациях возникших трудностей; выполнение нерешаемой задачи и изучение возможной реакции студентов; реакция на ошибку (способность самостоятельно обнаружить ошибку и выбрать действия, направленные не на исправление, а обращение за помощью к преподавателю); создание помех, дефицита времени, соревнований, варьирования оценки, получаемой от другого человека.

Следующим этапом в предложенной нами модели является процессуальный – этап подкрепления возникшей мотивации (интерес к нестандартным задачам, к формам сотрудничества, разным видам деятельности, поддержание разного уровня трудности заданий, подключение студентов к самоконтролю). Цель – использование системы дидактических средств, включая квазипрофессиональную деятельность, способствующих активизации процесса самостоятельного и осознанного овладения знаниями, умениями руководствоваться актуальными мотивами.

Основными задачами на данном этапе являются следующие:

- создание условий для закрепления и усиления мотивов;
- развивать у студентов познавательный и профессиональный интерес, способствующий активизации учебной деятельности;
- создавать положительный эмоциональный фон на занятии как фактор развития мотивации достижения;
- проектировать деятельность студента в соответствии с индивидуальными особенностями учебной деятельности (развитие процессуальной стороны мотивации).

На данном этапе студенты усваивают материал дисциплины, овладевают учебными действиями и операциями в связи с ее содержанием. Роль данного этапа в поддержании мотивации к учебной деятельности. Поэтому на данном этапе необходимо использовать активное включение студентов в учебный процесс. Решение поставленных задач второго этапа требует от студентов проявления осознанной инициативы в учебной деятельности.

Постановка и решение творческих задач является одним из приемов, стимулирующих деятельность студента на данном этапе. Сущность задач творческого уровня в том, что в них заключена самостоятельность, неопределенность способа решения, допустима его вариативность. Их решение происходит через понимание обучающимися имеющегося противоречия, проблемно-поисковой ситуации, несогласованности между частями задания, что требует преобразование информации в целях их

устранения. Само же решение проблемной ситуации, представляющее из себя акт творческого поиска, становится в этом случае «настоящим вызовом интеллекту, приучает учащихся к напряженной мыслительной работе, которая затем компенсируется радостью открытия» [3, с.126].

Цель оценочного этапа – контроль и оценка динамики развития учебных мотивов студентов в результате реализации педагогической модели. Цель достигается посредством решения следующих задач:

- закрепить учебные мотивы, отвечающие одновременно содержанию программного материала, а также требованиям профессиональной направленности обучения;
- на основании решения учебных задач, определить уровни сформированности учебных мотивов студентов.

Реализацию поставленных задач мы видим в грамотной организации учебного процесса, включающие в себя следующие средства и приемы:

- предлагать системы заданий «нарастающей» сложности;
- использование тестовых заданий;
- использование компьютерных технологий;
- возможность проверки полученного результата;
- внедрение рейтинговой системы оценивания.

Применение данной модели позволит повысить мотивацию студентов к активному и глубокому изучению фундаментальной дисциплины – математики, увеличить долю их личной ответственности за конечный результат, а также даст возможность получить специалиста с высокой профессиональной компетентностью.

Список литературы

1. Маркова А. К., Матис Т. А., Орлов А. Б. Формирование мотивации учения : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1990. 192 с.
2. Мешков Н. И. Мотивация учебной деятельности студентов : учеб. пособие. Саранск : Изд-во Мордовского университета, 1995. 184 с.
3. Родионов М. А. Мотивация учения математике и пути ее формирования : монография. Саранск : Изд-во МГПИ им. М. Е. Евсевьева, 2001. 252 с.
4. Варлашина С. Ю., Наземнова Н. В. Способы активизации учебной деятельности старшеклассников в процессе их обучения математическим методам распознавания геометрических образов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки. 2015. № 2. С. 175–181. URL: <https://rucont.ru/efd/550411>

Обучение математике на специальности «Экономическая безопасность»

Татьяна Вячеславовна Черушева

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

tank1100@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы профессиональной подготовки студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность».

Ключевые слова: матрица, дифференциальное уравнение, модель естественного роста выпуска продукции

Teaching mathematics in the specialty "Economic security"

Tat'yana V. Cherusheva

Penza State University, Penza, Russia

tank1100@yandex.ru

Abstract. The article deals with the issues of professional training of students studying in the specialty 38.05.01 Economic security.

Keywords: matrix, differential equation, model of natural output growth

В условиях глобализации мирового хозяйства, кризисных явлений в национальной экономике, усиления конкурентной борьбы между фирмами стала актуальной многоуровневая защита государственных органов и бизнеса от возникающих угроз. В связи с этим на рынке труда появился спрос на специалистов, способных разработать и внедрить систему экономической безопасности в государственных органах и органах местного самоуправления, на предприятиях и в учреждениях, обеспечивающую их устойчивое функционирование. Специальность «Экономическая безопасность» дает возможность сформировать комплексные знания и навыки в области экономики, права, информационной безопасности, бухгалтерского учета, экономического анализа, внутреннего контроля, ревизии, финансов и налогообложения.

Дисциплина «Математика» относится к базовой части образовательной программы по специальности 38.05.01 Экономическая безопасность, квалификация «Экономическая безопасность хозяйствующих субъектов».

В Смоленском государственном университете [1] обучение предмету происходит в течение четырех семестров. Во Владивостокском государственном университете экономики и сервиса [2] – 3 семестра и

отдельным курсом изучается теория вероятности и математическая статистика. Как отмечает руководство Уральского Федерального университета (УрФу) [3], дисциплина «Высшая математика» создает фундамент основ профессиональной деятельности специалиста по экономической безопасности. В УрФу курс состоит из шести разделов, охватывающих основы линейной алгебры, методы математического анализа, элементы теории рядов, экономико-математические модели и дифференциальные уравнения, теорию вероятностей. Данный курс позволяет решать профессиональные задачи при помощи математического моделирования и служит фундаментом статистического анализа во всех областях профессиональной деятельности специалиста.

Освоение данной дисциплины необходимо для дальнейшего изучения статистики, эконометрики, основ финансовой математики, методов принятия управленческих решений, математических методов в экономике и других.

Поэтому четкое и ясное понимание не только содержания современных социально-экономических операций, но и их математических основ становится необходимым условием высокой квалификации специалиста в области экономической безопасности.

В Пензенском государственном университете студенты, поступившие на «Экономическую безопасность», с 2022 года будут изучать математику только **один** семестр. За один семестр невозможно полноценно дать следующие разделы: основы линейной алгебры и аналитической геометрии на плоскости, методы математического анализа, элементы теории рядов, дифференциальные уравнения, теорию вероятности.

Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих экономических задач. Особенно этот вопрос стал актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Рассмотрим типичную задачу, использующую понятие векторов и их скалярного произведения.

Пример 1. Пусть предприятие выпускает ежедневно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в табл. 1. Требуется определить следующие ежедневные показатели: расход сырья S , затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

По данным табл. 1 составляются четыре вектора, характеризующих весь производственный цикл: $\mathbf{q}=(20,50,30,40)$ – вектор ассортимента, $\mathbf{s}=(5,2,7,4)$ – вектор расхода сырья, $\mathbf{t}=(10,5,15,8)$ – вектор затраты рабочего времени, $\mathbf{p}=(30,15,45,20)$ – ценовой вектор. Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие скалярные произведения вектора ассортимента $\mathbf{q}$ на три других вектора, т.е.

$$S = qs = 100 + 100 + 210 + 160 = 570 \text{ кг},$$

$$T = qt = 1220 \text{ ч}, P = qp = 3500 \text{ ден. ед.}$$

Таблица 1

Вид изделия, № п/п	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден.ед/изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Или пример 2. Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием 4-х видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \downarrow$$

По горизонтали – вид сырья (1,2,3,4), по вертикали- вид изделия. Требуется найти затраты сырья на каждый вид изделия при заданном плане их выпуска: соответственно 60, 50, 35 и 40 ед. Вектор-план выпуска продукции $q = (60, 50, 35, 40)$. Тогда решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому его виду; этот вектор затрат вычисляется как произведение вектора q на матрицу А:

$$qA = (60, 50, 35, 40) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим примеры из экономики на использование второго замечательного предела.

Пример 3. Известно, что формула сложных процентов имеет вид

$$Q = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n, \quad (1)$$

где Q_0 – первоначальная сумма вклада в банк, p – процент начисления за определенный период времени (месяц, год), n – количество периодов

времени хранения вклада, Q – сумма вклада по истечении n периодов времени. Формулы типа (1) используются также в демографических расчетах (прирост народонаселения) и в прогнозах экономики (увеличение валового национального продукта). Пусть первоначальный депозит Q_0 помещен в банк под $p = 100\%$ годовых, тогда через год сумма депозита составит $2Q_0$. Предположим, что через полгода счет закроется с результатом $Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}Q_0$ и эта сумма будет вновь помещена в качестве депозита в том же банке. В конце года депозит будет составлять $Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25Q_0$. Повторяя многократно этот процесс, за год получим $Q_{365} = Q_0 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714Q_0$. При ежедневном – $Q_{8720} = Q_0 \left(1 + \frac{1}{8720}\right)^{8720} = 2.718Q_0$. Нетрудно видеть, что последовательность значений возрастания первоначального вклада совпадает со значением второго замечательного предела.

Пример 4. Пусть темп инфляции составляет 1% в день. Насколько уменьшится первоначальная сумма через полгода? Применение формулы сложных процентов дает $Q = Q_0 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{182}$, где Q_0 — первоначальная сумма, 182 — число дней в полугодии. Преобразуя это выражение, получаем $Q = Q_0 \left[\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{-100} \right]^{-182/100} \approx \frac{Q_0}{e^{1.82}}$, т.е. инфляция уменьшит первоначальную сумму примерно в 6 раз.

Рассмотрим аппарат дифференциальных уравнений в экономике.

Начнем с модели рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими только от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят еще и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$. Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и ее производных:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18,$$

$$S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3.$$

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D=S$, приравняем правые части уравнений. После приведения подобных получаем $P''+2P'+5P+15=0$. Последнее равенство есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(t)$. Его решение имеет вид $P(t)=3+e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$. Если обозначить через P_{st} установившуюся цену, то нетрудно видеть, что $P(t) \rightarrow P_{st} = 3$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около нее. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене P_{st} с колебаниями около нее, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Модель естественного роста выпуска продукции в условиях ненасыщаемости рынка (или полной реализации производимой продукции), когда в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции, описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$Q' = lmPQ, \quad (2)$$

где $1/l$ – норма акселерации, m – норма инвестиции – постоянное число, причем $0 < m < 1$, P – фиксированная цена некоторой продукции, Q – количество продукции. Пусть в начальный момент времени $t=t_0$ задан объем выпуска продукции Q_0 . Тогда решение задачи Коши имеет вид

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (3)$$

Снимем предположение о ненасыщаемости рынка. Пусть $P=P(Q)$ – убывающая функция, т.е. с увеличением объема продукции на рынке цена на нее падает: $dP/dQ < 0$. Теперь имеем дело с нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно Q с разделяющимися переменными:

$$Q' = lmP(Q)Q = \alpha P(Q)Q. \quad (4)$$

Поскольку все сомножители в правой части этого уравнения положительны, то $Q' > 0$, т.е. функция $Q(t)$ возрастающая.

Характер возрастания функции определяется ее второй производной. Из уравнения (4) получаем

$$Q'' = \alpha Q' P \left(P + \frac{dP}{dQ} Q \right).$$

Используя эластичность спроса $E = \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q}$ и учитывая, что $\frac{dQ}{dP} < 0, E < 0$, окончательно получаем

$$Q'' = \alpha Q' P \left(1 - \frac{1}{|E|} \right). \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что $Q'' > 0$ при эластичном спросе, когда $|E| > 1$, и график функции $Q(t)$ имеет направление выпуклости вниз, что означает прогрессирующий рост. При неэластичном спросе $|E| < 1$, и в этом случае $Q'' < 0$ — направление выпуклости функции $Q(t)$ вверх, что означает замедленный рост (насыщение).

Для простоты примем зависимость $P(Q)$ в виде линейной функции $P(Q) = a - bQ, a > 0, b > 0$ (рис.1). Тогда уравнение (4) имеет вид

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q. \quad (6)$$

и

$$Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ). \quad (7)$$

Из соотношений (6) и (7) получаем: $Q' = 0$ при $Q = 0$ и при $Q = a/b$; $Q'' > 0$ при $Q < a/(2b)$ и $Q'' < 0$ при $Q > a/(2b)$; $Q = a/(2b)$ — точка перегиба графика функции $Q = Q(t)$. Приведенный на рис. 2 график этой функции (одной из интегральных кривых дифференциального уравнения (6)) носит название логистической кривой.

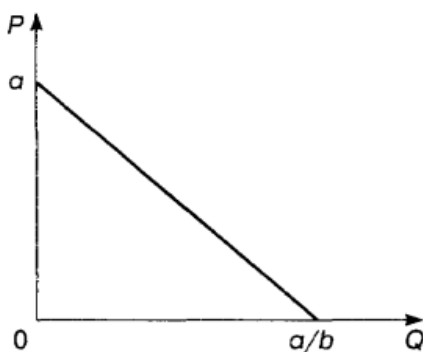


Рис. 1. $P(Q) = a - bQ, a > 0, b > 0$

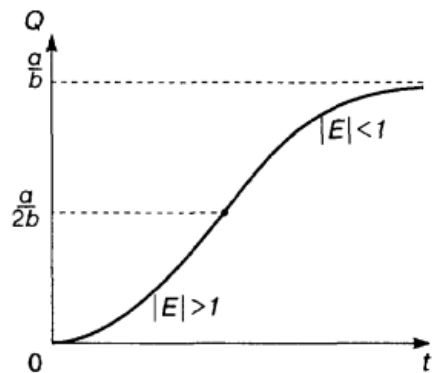


Рис. 2. $|E| < 1$ или $|E| > 1$

Показано, что при решении экономических требуются знания по алгебре, математическому анализу. В статью не вошли примеры, иллюстрирующие использование геометрии, числовых и степенных рядов и

других разделов высшей математики. Весь этот материал выпадает из изучения студентами ПГУ. Таким образом, математическая подготовка неизбежно пострадает.

Компетентностная модель выпускника, обучающегося по образовательной программе по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», специализация «Экономическая безопасность хозяйствующих субъектов», содержит УК-1: «Обучающийся способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий».

В результате освоения дисциплины обучающийся выше названных вузов должен **знать:** основы математического анализа, линейной алгебры, комбинаторики, математической логики, теории вероятностей и математической статистики; **уметь:** применять методы математического анализа, теории вероятностей для оптимизации решения профессиональных экономических и управленческих задач; **владеть** навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

Смогут ли студенты нашего вуза успешно конкурировать с ними?

Список литературы.

1. URL: <https://cdo.smolgu.ru/local/crw/course.php?id=5034>
2. URL: <https://reg.vvsu.ru/epln/18619.pdf>
3. URL: <https://programms.edu.urfu.ru/ru/10033/pages/disciplines/>
4. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : учебник. 2-е изд., испр. М. : Дело, 2001. 688 с.

8. ДИСКУССИОННЫЕ РАБОТЫ

УДК 514.112.3, 514.112.6

О реализации построения Архимеда в задаче трисекции угла методом двух равных окружностей с общим радиусом между ними

Сергей Леонидович Михайлов

г. Заречный Пензенской области, Россия
smthrsol@internet.ru

Аннотация. Предлагается успешная реализация построения Архимеда в задаче трисекции произвольного угла посредством объединения двух равных окружностей, имеющих общий радиус между ними. Этот новый геометрический объект устраняет неразрешимое ранее препятствие – проблему отметок на линейке – и этим реализует построение Архимеда, ранее считавшееся невозможным.

Ключевые слова: трисекция произвольного угла, построение Архимеда, объединение двух равных окружностей

About Arkhimed construction idea on the three-section arbitrary angle task by the two equal circles combination with common radius between them

Sergey L. Mikhaylov

Zarechny, Penza region, Russia
smthrsol@internet.ru

Abstract. Suggest the successful realization of the Arkhimed construction idea on the three-section arbitrary angle task by the two equal circles combination with common radius between them. This new geometrical object to liquidate the mark-problem on the ruler and now the three-section arbitrary angle task can be successful solution.

Keywords: three-section arbitrary angle task, Arkhimed construction idea, two equal circles combination with common radius between them

Знаменитая издревле задача трисекции произвольного угла (разделение на три равные части) исключительно простыми циркулем и линейкой без делений или отметок на ней – традиционно относится к числу неразрешимых задач. Но в некоторых частных случаях или с привлечением дополнительных средств – она все же разрешима. Автор обра-

тился к идее, приписываемой самому Архимеду, однако классически - она успешна лишь при использовании линейки с отметками на ней и не иначе. Вместо этого – строится исключительно циркулем и линейкой без делений объединение двух равных произвольных окружностей с общим радиусом между ними. Именно это и позволяет успешно реализовать построение Архимеда для произвольных углов, но не свыше 135 градусов (реально – нежелательно свыше 120 из-за особенностей построения вручную). Большие углы могут быть произвольно разделены, а результаты – суммированы.

Замечательная идея геометрического построения, предложенная скорее всего самим Архимедом, сводится к построению двух равнобедренных треугольников с общей стороной, которые сами составляют больший треугольник, в котором два несмежных угла равны углу, подлежащему трисекции и являющемуся для них – внешним. Причем соотношение в несмежных углах – 1:2 и решает задачу трисекции угла т.к. меньший угол и будет $1/3$ от исходного (рис. 1).

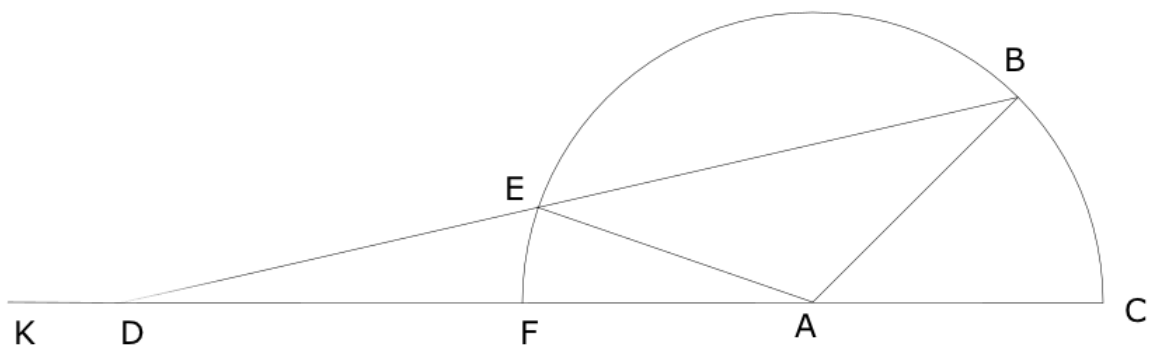


Рис. 1. К идее построения Архимеда для решения задачи трисекции угла [1] (IV.A.11., Рис.32. с 255). Необходимо получить $\triangle DEA$ равнобедренным, как и $\triangle EAB$ в составе $\triangle ABD$. Тогда для внешнего $\angle BAC$ – угол $\angle BDA$ – искомый

Однако такое построение невозможно совершить исключительно циркулем и линейкой без делений, как и требует важнейшее условие, поставленное древними для этой, так и нерешенной до сих пор задачи, даже признанной с доказательством П. Ванцеля – неразрешимой вообще.

Однако многие любители – упорно ищут решение задачи трисекции различными способами, порой и самыми экзотическими, и почти всегда без математического доказательства – чему есть множество данных в сети интернет.

Автор сосредоточился именно на доказательных способах возможных решений этой задачи. Одним из подходов является развитие идеи Архимеда (рис. 1).

При этом эффективным оказалось объединение двух равных окружностей некоторого произвольного радиуса R , имеющих общий R –

радиус между собой (рис. 2). Тогда можно работать с отрезками длиной R и строить различные треугольники с R – сторонами, что и решает неразрешимую проблему отметок на линейке. Это препятствие отныне успешно обходится построением второй равной окружности, поставяющей как отрезки, так и отметки, делающие их длиной R сразу же в одном этом элементе.

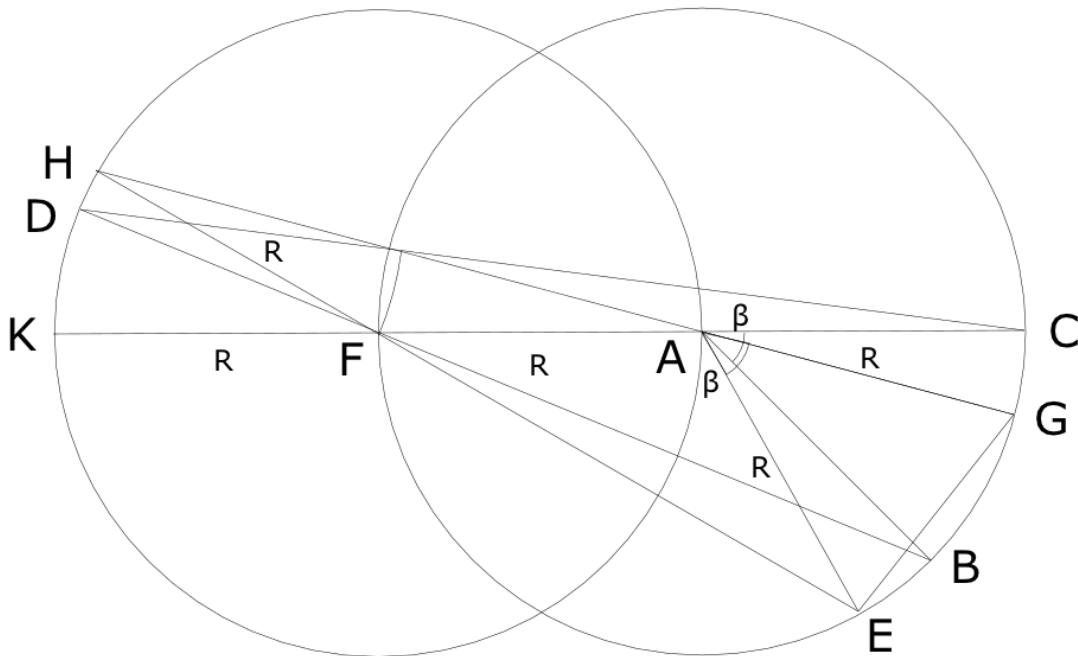


Рис. 2. К реализации построения Архимеда методом сдвоенных R окружностей

Угол, подлежащий трисекции: $\angle BAC = 45^\circ = \angle GAE$. Результат трисекции – угол $\angle GHE = 15^\circ$. Рисунок не является эталонным для измерений по нему здесь. Треугольник $\triangle GHE$ – в результате – состоит из трех равнобедренных треугольников: $\triangle GAE$, $\triangle FAE$, $\triangle AFH$ – именно так и реализовано построение Архимеда, ранее признававшееся невозможным.

Так, если нам дан некоторый произвольный угол $\angle BAC = \beta$, подлежащий трисекции и имеющий вершину A как центр окружности произвольного радиуса R – квантор $((R - A))$, то продолжим луч AC за A на достаточное – $2R$ – расстояние – прямая CK .

Отложим R отрезок на CK прямой от вершины A – точка F и построим вторую R окружность с центром в F – квантор $((R - F))$. Таким образом получим сдвоенные окружности с общим R радиусом, необходимые далее.

Теперь соединим точку B луча AB с центром F в $((R - F))$ – отрезок BF и далее продолжим его до пересечения с окружностью $((R - F))$ – точка D и прямая BD .

Затем соединяем D с C – прямая DC . Проводим там дугу радиуса R из D и на эту величину сдвигаем исходный угол $\angle BAC$ на окружности

((R – A)) от прямой СК – лучи GA и EA соответственно. Таким образом исходный угол занял рабочее положение для дальнейшего.

Соединяем точки G и E с центрами A и F и продолжаем эти отрезки до пересечения с ((R – F)) – точка H и угол $\angle GHE$ и $\triangle GHE$ состоящий из трех равнобедренных треугольников: $\triangle GAE$, $\triangle FAE$, $\triangle AFH$ – именно так и реализуется искомое построение Архимеда для угла $\angle BAC = 45^\circ = \angle GAE$ (Рис.2.).

Работа этого алгоритма автором проверена для углов 30° , 45° , 60° , 90° , 120° .

Выводы

1. Гениальность Архимеда свела всю проблему задачи трисекции угла к проблеме отметок на линейке, используемой в построении (рис. 1). Все остальные элементы и средства, ведущие к успешному результату – им были предложены еще в те времена.

2. Автором – в развитие его замысла – была введена в построение вторая равная окружность (рис. 2), успешно решившая именно неразрешимую до сих пор проблему отметок на линейке. Вместо «линейки» – предлагается всегда существующий и потому – всегда доступный R – радиус во второй равной окружности.

3. Это построение строго соответствует требованиям древних постановщиков и не использует никаких дополнительных средств – а только простой циркуль и линейку без делений. Ее можно заменить здесь даже лазерным лучом, где делать отметки – невозможно.

4. Построение второй окружности – никаким дополнительным средством не является, т.к. в постановке этой задачи количество окружностей или дуг – никак не ограничивается, как и способы работы как с циркулем, так и с линейкой без делений на ней.

5. Кстати, даже построение биссектрисы – уже требует не двух, а трех окружностей – или их дуг – для деления угла на две равные части.

6. Ограничение метода для углов в 135° (в ручном построении – лучше не более 120°) – несущественно. Любой больший угол – всегда можно представить суммой меньших, а частные результаты – успешно суммировать.

7. Для решения задачи пяти- и более секции данный метод непосредственно применяться не может.

Список литературы

1. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М. : Наука, 1974. 416 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

- Алиев Б. А., Керимов В. З.** Разрешимость одной краевой задачи с операторными граничными условиями для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с комплексным параметром.....3
- Сизиков В. С.** Моделирование задачи цифровой обработки искаженного изображения Юпитера и его спутников путем решения интегральных уравнений.....9
- Eshkuvatov Z. K.** Semi-Bounded Solution of Hypersingular Integral Equations of the First Kind.....15
- Мартынов С. И., Ткач Л. Ю.** Динамика системы из трех вращающихся в жидкости частиц21
- Фараджев А. С. оглы, Мегралиев Я. Т. оглы.** Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени коэффициентов и источника в уравнении движения волн с поверхностным напряжением25
- Лерер А. М., Макеева Г. С., Черепанов В. В.** Математическое моделирование нелинейно-оптических процессов смещения терагерцовых волн в графеновых метаповерхностях.....30
- Лерер А. М., Макеева Г. С., Черепанов В. В.** Математическое моделирование реконфигурируемых конвертеров частоты инфракрасного диапазона на основе графеновых решеток.....41
- Boykov I. V., Boykova A. I., Faydaoglu S.** Spline-collocation methods for solving hypersingular integral equations of second kind with singular solutions53

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

- Марусеев И. А., Рассадин А. Э.** О скрытых взаимосвязях между резольвентной полугруппой и интегральными преобразованиями60

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Карчиганов А. Ф., Жалнин Р. В., Дерюгин Ю. Н.** Исследование порядка точности для SPH-метода66

Игумнова В. В., Кудряшова Н. Ю. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений на отрезках.....	72
Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с фиксированными узлами	78
Юркалова Э. М., Кудряшова Н. Ю. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах	82
Бойков И. В., Пивкина А. А. Приближенное решение системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений Амбарцумяна.....	88

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

Бутаев М. Ж., Черушева Т. В., Айкашев П. В. Обзор многоканальных систем массового обслуживания с приоритетом.....	96
Мамедова Т. Ф., Ландышев А. В. Моделирование динамики численности занятого населения по возрастным группам	101
Шалаева А. А., Мамедова Т. Ф. Математическое моделирование поведения компаний в условиях конкурентной борьбы	105
Байрамова А. М. Исследование пространственных моделей иммунологии	109

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

Грозная Е. В., Першенков П. П., Савенков А. В. Некоторые аспекты измерения уровня жидкостей	117
Пряничникова Н. О., Захарова Ю. Ф. Методы цифрового кодирования звуковых сигналов	125
Jalilova R. Q. About identification of one model of nonstationary filtration.....	131
Крохин И. А. Противодействие угрозе атак Маршалко с целью повышения стойкости биометрико-нейросетевой защиты личных криптографических ключей	136
Москалева М. А. Восстановление параметров неоднородности тела в полубесконечном прямоугольном волноводе.....	141
Купцов А. Н., Печаткин К. В. Математическое и компьютерное моделирование оценки риска эксплуатации взрывоопасных объектов при их длительном хранении	147

Москалева М. А. Численный метод решения векторной трехмерной обратной задачи электродинамики	155
Щеголихин Я. П., Митрохин М. А., Еремин А. А., Нагаев М. Т. Методы выравнивания яркости изображения при детектировании объектов	160
Тихов С. В. Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в плоском экранированном слое с нелинейной неоднородной средой	166
Малов К. И., Пескова Е. Е. Исследование пиролиза углеводородных смесей с целью получения ценных продуктов химических реакций	171
Литвинов В. А., Кожемякина Е. В. О прохождении гамма-импульса сквозь атмосферу Земли.....	177

6. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

Золотарева Т. А. Математическая реализация нового статистического критерия, полученного заменой стандартных отклонений их оценками в классической формуле Эджуорта – Эдлтона – Пирсона	184
Сафронов Н. В., Захарова Ю. Ф. Методы обучения в задачах обнаружения и исправления ошибок.....	189
Савинов К. Н., Еременко Р. В. Перспективы перехода от использования бинарных искусственных нейронов к использованию троичных нейронов в сцепке с избыточными кодами обнаружения и исправления ошибок	194
Тимошкин М. О., Романова Е. Г. Применение метода глубокого Q-обучения для обучения агентов в логических играх	199
Вдовина Ю. В., Захарова Ю. Ф. Методы растрово-векторного преобразования графической информации	207

7. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

Черушева Т. В. Приложения функций нескольких переменных в экономической теории	212
Болотникова О. В., Грунина Т. В. Внутрипредметные связи математического анализа при изучении площади плоской фигуры	218
Яшин Е. Е., Мамедова Т. Ф., Кирдяшова Е. В. Обработка данных Яндекс.Форм и анализ диагностики интернет-зависимости обучающихся	222

Варлашина С. Ю., Наземнова Н. В. Модель формирования учебной мотивации студентов колледжа при изучении естественно-научных дисциплин	226
Черушева Т. В. Обучение математике на специальности «Экономическая безопасность»	232

8. ДИСКУССИОННЫЕ РАБОТЫ

Михайлов С. Л. О реализации построения Архимеда в задаче трисекции угла методом двух равных окружностей с общим радиусом между ними	239
--	-----

Научное издание

Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем

Материалы

*XVI Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов*

Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2022 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Mathematical and Computer Modelling of Natural Science
and Social Problems (MCM-2022)

*Proceedings of the Sixteenth Russian Conference
with international participation MCM-2022*

Penza, Russian Federation, 1–4 June, 2022

E d i t e d b y
Илья V. Boykov

Все материалы представлены в авторской редакции

*Корректор А. Г. Темникова
Компьютерная верстка Д. В. Тарасова
Дизайн обложки А. Е. Журиной*

Подписано в печать 20.07.2022. Формат 60×84¹/₁₆.
Усл. печ. л. 14,42.
Заказ № 400. Тираж 100.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru

Вниманию авторов!

Издательство ПГУ выпускает учебную, научную и художественную литературу, презентационную и акцидентную продукцию, а также полноцветные юбилейные и мемориальные издания в соответствии с ГОСТ 7.60–2003.

Издательство ПГУ принимает к изданию рукописи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows версий **2003 и выше**. Формат – А4, основной шрифт – Times New Roman, 14–16 pt через одинарный интервал (минимальный размер шрифта в таблицах и сносках – 12,5 pt). Тип файла в электронном виде – doc, docx.

Работа должна содержать индекс УДК, аннотацию.

Аннотация (ГОСТ 7.86–2003, ГОСТ 7.9–1995) включает характеристику основной темы, проблемы объекта, цели работы и ее результаты. В аннотации указывают, что нового несет в себе данный документ в сравнении с другими, родственными по тематике и целевому назначению. Аннотация может включать сведения о достоинствах произведения. Текст аннотации начинают фразой, в которой сформулирована главная тема документа. Заканчивается аннотация читательским адресом.

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте после ссылки на них (растровые рисунки представляются в виде отдельных файлов в формате jpg, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt. (Рисунки должны быть доступны для правки!). Рисунки должны сопровождаться подрисовочными подписями, на все рисунки и таблицы в тексте должны быть ссылки.

Формулы в тексте выполняются только в редакторе формул **MathType версия 5.0** и выше. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц – прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования необходимо соблюдать и в рисунках.

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. Требования к оформлению списка литературы на русские и иностранные источники (ГОСТ 7.1–2003): для книг – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; для журнальных статей, сборников трудов – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; для материалов конференций – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, контактные телефоны.

Контакты Издательства ПГУ: (8412) 56-47-33, 36-84-91. E-mail: iic@pnzgu.ru

